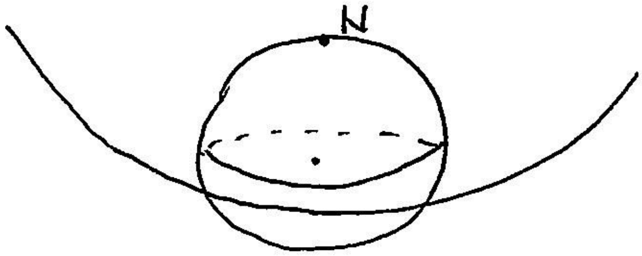
③ Доказати да је стереографска пројекција рестрикција инверзије у односу на сферу са центром N и полупречником $\sqrt{2}$.



$$d(N,(x_1,x_2,x_3))\cdot d(N,(x,y,0)) \overset{?}{=} (\sqrt{2})^2$$

(са ознакама из претходног зад.)

$N=(0,0,1)$

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2+(x_3-1)^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2+1} \underset{?}{=} 2$$

$$z=x+iy \quad x=\frac{x_1}{1-x_3},\ y=\frac{x_2}{1-x_3},\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$$

$$\sqrt{1-2x_3+1}\cdot\sqrt{\left(\frac{x_1}{1-x_3}\right)^2+\left(\frac{x_2}{1-x_3}\right)^2+1}=2$$

$$\sqrt{2-2x_3}\cdot\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+(1-x_3)^2}{(1-x_3)^2}}=2$$

$$\sqrt{2}\sqrt{\cancel{1-x_3}}\cdot\sqrt{\frac{2\cancel{(1-x_3)}}{\cancel{(1-x_3)^2}}}=2$$

$$2=2 \quad ✓$$

Још:

$\varphi_N(p)=z$

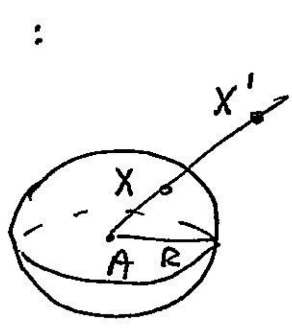
N, p и z колинеарне

и p и z са исте стране тачке N !

* инверзија у односу на сферу $S(A,R)$:

$$f(x,y,z)=(x',y',z') \qquad f(X)=X'$$

$$d((x,y,z),A)\cdot d((x',y',z'),A)=R^2$$



за $A=(0,0,0)$ и $R=1$

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=1$$

A, X и X' колинеарне

X и X' са исте стране A

$$x'=\lambda x,\ y'=\lambda y,\ z'=\lambda z$$

$$|X|\cdot|X'|=1$$

$$\lambda\cdot|X|^2=1 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{|X|^2} \Rightarrow X'=\frac{X}{|X|^2}$$

Сферни извод

$$\lim_{h\to 0}\frac{d(f(z+h),f(z))}{|h|}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{|h|}\cdot\frac{2|f(z+h)-f(z)|}{\sqrt{(1+|f(z+h)|^2)(1+|f(z)|^2)}}$$

$$=\frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$$

Ознака: $S(f):=\frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$ (или $f^{\#}$)

$\Omega\subseteq\mathbb{C}$ област, $f\in\mathcal{F}$, $f:\Omega\to(X,d)$

дефиниција: фамилија функција $\mathcal{F}$ је еквинепрекидна на скупу $E\subseteq\Omega$ ако $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall z_0,z\in E)(\forall f\in\mathcal{F})\ |z-z_0|<\delta\Rightarrow d(f(z),f(z_0))<\varepsilon$

* Из деф је јасно да су све $f\in\mathcal{F}$ равномерно непрекидне на E.

Теорема (Арцела-Асколи)

Нека је $\mathcal{F}$ фамилија непрекидних функција из отвореног $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ у метрички простор (X,d). Тада је $\mathcal{F}$ нормална фамилија акко

(i) $\mathcal{F}$ је еквинепрекидна на сваком компакту $K\subseteq\Omega$

и

(ii) $(\forall z\in\Omega)(\exists K\subseteq X, K\text{ компакт})\ \{f(z): f\in\mathcal{F}\}\subseteq K$

(Показати т. Монтела уз помоћ А.А) ← доказати!

---

(1) Нека је $\mathcal{F}$ фамилија холоморфних функција на $\Omega\subseteq\overline{\mathbb{C}}$ (Ω произвољан отворен и повезан, област) са вредностима у $\overline{\mathbb{C}}$ (то су у ствари мероморфне функције у $\mathbb{C}$)

Ако је $\mathcal{F}$ нормална фамилија, да ли је и $\mathcal{F}'=\{f': f\in\mathcal{F}\}$ обавезно нормална фамилија?

Нека је $f_n(z)=n(z^2-n)$ и $\mathcal{F}=\{f_n: n\in\mathbb{N}\}$ (тражимо пример фамилије за коју ово не важи)

$f_n:\mathbb{C}\to\overline{\mathbb{C}}$ Покажимо да је $\mathcal{F}$ нормална фамилија.

$\lim_{n\to\infty} f_n(z)=\infty$

Нека је $K\subseteq\mathbb{C}$, K компакт и $\varepsilon>0$

Треба наћи $n_0\in\mathbb{N}$ тд. $(\forall n\geq n_0)(\forall z\in K)\ d(f_n(z),\infty)<\varepsilon$

$$d(f_n(z),\infty)=\frac{2}{\sqrt{1+|f_n(z)|^2}}=\frac{2}{\sqrt{1+n^2|z^2-n|^2}}<\varepsilon$$

$\sqrt{1+n^2|z^2-n|^2} > \frac{2}{\varepsilon}$

$n^2|z^2-n|^2 > \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 - 1$ ← то хоћемо да важи

Пошто је $|z^2-n| \geq n-|z|^2$ било би довољно нпр. да важи

$(n-|z|^2)^2 > \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 - 1$ и да n буде довољно велико тј. $n > |z|^2$ $\forall z \in K$

<u>Зашто</u>: Нека је $R>0$ тд. $K \subseteq B(0,R)$ (тада за све $z\in K$ важи $|z|<R$)

и нека је $n_0 = \left[R^2 + \sqrt{\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 - 1}\,\right] + 1$

За све $n \geq n_0$ је тада $n - |z|^2 \geq n - R^2 \geq \sqrt{\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 - 1}$ $/^2$

$$(n-|z|^2)^2 \geq \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 - 1$$

па и $n^2 \cdot (n-|z|^2)^2 \geq \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 - 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{\sqrt{1+n^2|z^2-n|^2}} < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ (f_n) конв. равномерно на K ка ∞.

Докажимо сада да $\mathcal{F}'$ није нормална.

$f_n'(z) = n \cdot 2z$

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(z) = \begin{cases} 0, & z=0 \\ \infty, & z\neq 0 \end{cases}$$

$d(f_n'(z), \infty) = \frac{2}{\sqrt{1+4n^2|z|^2}} = 2$ <u>за $z=0$</u>, па f_n' не конв. равномерно ни на једном компакту који садржи 0.

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}'$ није нормална фамилија

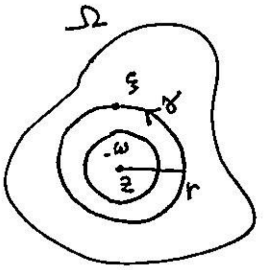
(2) Ако је $\mathcal{F} \subseteq H(\Omega)$ нормална фамилија ($\Omega \subseteq \mathbb{C}$ област), доказати да је и $\mathcal{F}'$ нормална фамилија.

Нека је $\mathcal{F} \subseteq H(\Omega)$ нормална фамилија. На основу теореме Монтела је она и равномерно ограничена на компактима.

$\mathcal{F}' \subseteq H(\Omega)$ (знамо из КА)

Покажимо да је и $\mathcal{F}'$ равномерно ограничена на компактима, па ћемо поново на основу Монтелове т добити да је и $\mathcal{F}'$ нормална фамилија.

Нека је $z \in \Omega$ и $\overline{D}(z,r) \subseteq \Omega$. Означимо $\gamma = \partial D(z,r)$



КИФ: $f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - w)^2} d\xi$ за $w \in D(z,r)$

ако $w \in D(z, \frac{r}{2})$ онда је $|\xi - w| \geq \frac{r}{2}$ за све $\xi \in \gamma$

$\Rightarrow |f'(w)| \underset{\text{ОИН}}{\leq} \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{|f(\xi)|}{\frac{r^2}{4}} |d\xi| = \frac{4}{2\pi r^2} \cdot \int_\gamma |f(\xi)| |d\xi|$

Ако је M_γ ограничење фамилије $\mathcal{F}$ на компакту γ онда је $|f'(w)| \leq \frac{4}{2\pi r^2} \cdot M_\gamma \cdot 2r\pi = \frac{4M_\gamma}{r}$ $\forall f \in \mathcal{F}$ и за све $w \in D(z, \frac{r}{2})$

(За дато $z \in \Omega$ придружимо му r као горе и зовимо га r_z.)

Нека је сада $K \subseteq \Omega$ произвољан компакт.

$K \subseteq \bigcup_{z \in K} D(z, \frac{r_z}{2})$, постоји коначно потпокривање скупа K овим дисковима

$\Rightarrow K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} D(z_i, \frac{r_i}{2})$ $(r_{z_i} = r_i)$

Сваком $D(z_i, \frac{r_i}{2})$ одговара M_{γ_i} тд. $|f'(w)| \leq \frac{4M_{\gamma_i}}{r_i} = M_i$

$\forall f' \in \mathcal{F}', \forall w \in D(z_i, \frac{r_i}{2})$

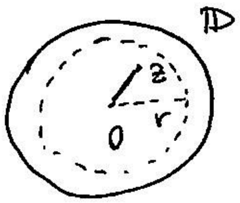
Нека је $M = \max\{M_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$

Тада је $|f'(w)| \leq M$ $\forall w \in K, \forall f' \in \mathcal{F}'$

па је $\mathcal{F}'$ равн. ограничена.

$\Rightarrow \mathcal{F}'$ је нормална фамилија

③ Нека је $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(\mathbb{D})$ $(\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\})$ тд је $f(0) = 0$ $\forall f \in \mathcal{F}$. Ако је $\mathcal{F}' = \{f' : f \in \mathcal{F}\}$ нормална фамилија, показати да је и $\mathcal{F}$ нормална фамилија.



$\mathcal{F}'$ је нормална, па је равн.огр. на компакт.

$K \subseteq \mathbb{D}$ произвољан компакт

$\Rightarrow (\exists r \in (0,1))\ K \subseteq D(0,r)$

Покажимо да је $\mathcal{F}$ равн.-ограничена на $D(0,r)$, па ће бити и на K.

$z \in D(0,r)$ произвољан

дуж која спаја 0 и z је у $D(0,r)$ (нека се зове γ)

$\gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = z$

$\gamma : [0,1] \longmapsto D(0,r)$

$$\underset{\underset{0}{\|}}{f(z) - f(0)} = \int_\gamma f'(w)\,dw$$

Нека је M_r горње огр за $\mathcal{F}'$ на компакту $\overline{D(0,r)}$

$$\Rightarrow\ |f(z)| \underset{\text{оцн}}{\leq} \int_\gamma |f'(w)||dw| \leq M_r \cdot \ell(\gamma) = M_r \cdot |z| \leq M_r \quad \text{за } |z| < 1$$

тј. за све $z \in D(0,r) \subseteq \mathbb{D}$ па и за све $z \in K$

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ је равномерно ограничена на компактима

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ је нормална

Монтел