Нормалне фамилије

T тополошки простор, (X,d) метрички простор

деф1: Низ $f_n : T \to X$ конвергира К-равномерно ка $f : T \to X$ у ознаци $f_n \overset{лок}{\rightrightarrows} f$ ако f_n конвергира ка f равномерно на сваком компакту $K \subseteq T$. (подразумевано $n \to \infty$)

$$f_n \overset{лок}{\rightrightarrows} f \iff (\forall K \subseteq T, \text{ компакт } K)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall z \in K)\, d(f_n(z), f(z)) < \varepsilon$$

$n_0 = n_0(\varepsilon, K)$ зависи од ε и K

код нас углавном: $T \subseteq \mathbb{C}$ метрички простор са наслеђеном метриком

$X = \mathbb{C}$ са уобичајеном метриком

или $X = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{C}}$ са сферном метриком

$$d_s(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}$$

$$d_s(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}$$

деф2: Кажемо да је фамилија $\mathcal{F}$ пресликавања из T у X НОРМАЛНА ако сваки низ пресликавања $\{f_n\}$ из $\mathcal{F}$ има подниз $\{f_{n_k}\}$ који конвергира равномерно на компактима $K \subseteq T$, тј. $f_{n_k} \overset{лок}{\rightrightarrows} f$ $(f : T \to X)$.

$\mathcal{H}(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ холоморфна} \}$ где је $\Omega \subseteq \mathbb{C}$

Тврђење: 1) $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f_n \overset{лок}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f \in \mathcal{H}(\Omega)$

2) $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f_n \overset{лок}{\rightrightarrows} f \Rightarrow f_n' \overset{лок}{\rightrightarrows} f'$

$X = \mathbb{C}$ или $X = \overline{\mathbb{C}}$

деф3: фамилија $\mathcal{F}$ пр. из Ω у X је равномерно ограничена на $K \subseteq \Omega$ ако постоји $M \geq 0$ тд је $(\forall f \in \mathcal{F})(\forall z \in K)\ |f(z)| \leq M$.

Ω област

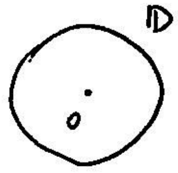
Теорема1 (Монтел) Ако је $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ равномерно ограничена на сваком компакту $K \subseteq \Omega$, онда је $\mathcal{F}$ нормална фамилија.

Важи и обратно!

(Монтел 2)

__Теорема 2__: Нека је $\Omega \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ и $a, b, c \in \overline{\mathbb{C}}$ 3 различите тачке и
$\mathcal{F} = \{ f : \Omega \to \overline{\mathbb{C}} \setminus \{a,b,c\} \mid f \text{ холоморфна} \}$.
Тада је $\mathcal{F}$ нормална фамилија.

(1) Нека је $\{f_n\}$ низ холоморфних ф-ја на $\mathbb{D} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}$.
Ако постоји $M > 0$ т.д. $\int_C |f_n(z)|\,|dz| \leq M$ за свако f_n и за сваки круг C из $\mathbb{D}$, доказати да $\{f_n\}$ има подниз који конвергира равномерно на свим компактима $K \subseteq \mathbb{D}$. (тј. доказати да је фамилија $\mathcal{F} = \{ f_n : n \in \mathbb{N} \}$ нормална фамилија)



$f_n : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ $\qquad \mathcal{F} = \{ f_n : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \mid n \in \mathbb{N} \}$

$\int_C |f_n(z)|\,|dz| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

* Покажимо да је фамилија $\mathcal{F}$ равномерно ограничена на сваком компакту $K \subseteq \mathbb{D}$.

Нека је $z_\alpha \in \mathbb{D}$ произвољна и нека је $R_\alpha > 0$ т.д.
$\overline{D}(z_\alpha, R_\alpha) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_\alpha| \leq R_\alpha \} \subseteq \mathbb{D}$. Тада за свако $z \in D(z_\alpha, \frac{R_\alpha}{2})$ применимо Кошијеву интегралну формулу на f_n

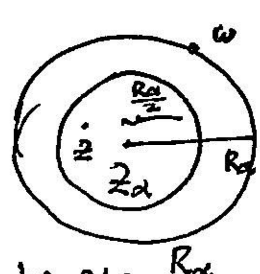
$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_\alpha, R_\alpha)} \frac{f_n(\omega)}{\omega - z}\, d\omega$$

$\partial D(z_\alpha, R_\alpha)$ је круг у $\mathbb{D}$!

$$|f_n(z)| \overset{\text{ОИН}}{\leq} \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\partial D(z_\alpha, R_\alpha)} \frac{|f_n(\omega)|}{|\omega - z|}\,|d\omega|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{R_\alpha} \int_{\partial D(z_\alpha, R_\alpha)} |f_n(\omega)|\,|d\omega|$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{услов}}}{\leq} \frac{1}{\pi R_\alpha} \cdot M = \frac{M}{\pi R_\alpha}$$



$|\omega - z| > \frac{R_\alpha}{2}$

$\frac{1}{|\omega - z|} < \frac{2}{R_\alpha}$

Дакле, за $\forall z \in D(z_\alpha, \frac{R_\alpha}{2})$ је $|f_n(z)| \leq \frac{M}{\pi R_\alpha} = M_\alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Нека је сада $K \subseteq \mathbb{D}$ произвољан компакт из $\mathbb{D}$.

K је покривен фамилијом $\{D(z_\alpha, \frac{R_\alpha}{2}) : z_\alpha \in K\}$, па због компактности има коначно подпокривање тј. $K \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} D(z_\alpha, \frac{R_\alpha}{2})$, A коначан скуп.

Нека је $M_K = \max_{\alpha \in A} M_\alpha$.

(Докажимо да је M_K ограничење на K)

Ако је $z \in K$ произвољно онда $\exists \alpha \in A$ тд. $z \in D(z_\alpha, \frac{R_\alpha}{2})$, па важи $|f_n(z)| \leq M_\alpha \leq M_K$.

Дакле, $(\forall z \in K)(\forall n \in \mathbb{N})\ |f_n(z)| \leq M_K$, тј. фамилија $\mathcal{F}$ је равномерно ограничена на сваком компакту $K \subseteq \mathbb{D}$.

Сада на основу Монтелове теореме следи да је $\mathcal{F}$ нормална.

$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ Риманова сфера

② (Одавде ћете видети како долазимо до сферне метрике)

Нека је $S^2 = \{ p=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 : x_1^2+x_2^2+x_3^2=1 \}$.

Ако је $\varphi_N : S^2\to\overline{\mathbb{C}}$ стереографска пројекција (тачки $p\in S^2$ додељује тачку из $\mathbb{R}^2$ која се добија у пресеку праве кроз $N(0,0,1)\in S^2$ и p са равни Oxy. Због $\mathbb{C}\approx\mathbb{R}^2$ поистовећујемо $(x,y,0)$ и $z=x+iy$)

а) Ако је $p=(x_1,x_2,x_3)$ и $z=\varphi_N(p)$, доказати:

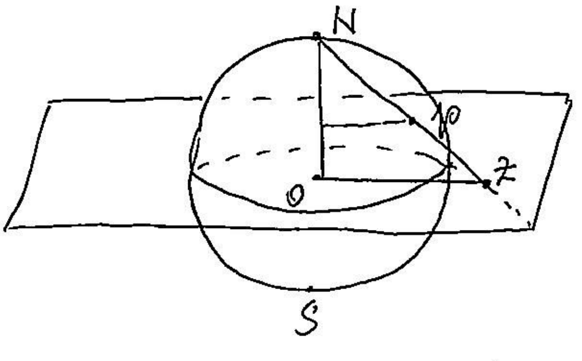
$$x_1=\frac{z+\overline{z}}{1+|z|^2},\quad x_2=\frac{z-\overline{z}}{i(1+|z|^2)},\quad x_3=\frac{|z|^2-1}{1+|z|^2},\quad z=\frac{x_1+ix_2}{1-x_3}$$

б) Ако је $\sigma:\overline{\mathbb{C}}^2\to\mathbb{R}$ дато са $\sigma(z_1,z_2)=|p_1-p_2|$, где су p_1 и p_2 тачке из S^2 т.д. $\varphi_N(p_1)=z_1$ и $\varphi_N(p_2)=z_2$, доказати:

$$\sigma(z_1,z_2)=\frac{2|z_1-z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}},\quad \sigma(z,\infty)=\frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}$$

$$\sigma\left(\frac{1}{z_1},\frac{1}{z_2}\right)=\sigma(z_1,z_2)$$ (|·| је еуклидска метрика у $\mathbb{R}^3$)

в) Наћи $\varphi_S: S^2\to\overline{\mathbb{C}}$ ако је φ_S такође стереографска пројекција, али из тачке $S(0,0,-1)$.



права кроз N и p : $(N=(0,0,1),\ p=(x_1,x_2,x_3))$

$$\frac{X-0}{x_1-0}=\frac{Y-0}{x_2-0}=\frac{Z-1}{x_3-1}=k\quad (X,Y,Z)\in\mathbb{R}^3,\ k\in\mathbb{R}$$

$$\left.\begin{aligned} X&=kx_1\\ Y&=kx_2\\ Z&=k(x_3-1)+1\end{aligned}\right\}$$ ова права садржи тачку $z=(x,y,0)$

$\Downarrow$

$$x=kx_1$$
$$y=kx_2$$
$$0=k(x_3-1)+1$$

$$k=\frac{1}{1-x_3}$$

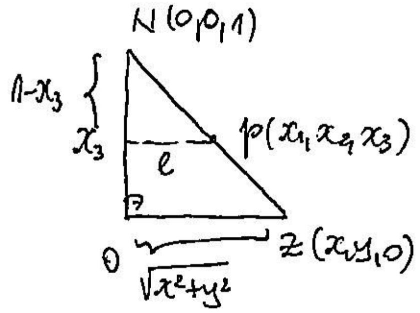
$$y=\frac{x_2}{1-x_3}$$

$$x=\frac{x_1}{1-x_3}$$

$\varphi_N(S)=0$

$\varphi_N(N)=\infty$

$$\varphi_N(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{x_1}{1-x_3},\frac{x_2}{1-x_3},0\right)\implies z=\frac{x_1+ix_2}{1-x_3}$$



сличности : $\frac{1-x_3}{1} = \frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2+(x_3-1)^2}}{\sqrt{x^2+y^2+1}} = \frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$l = \sqrt{x_1^2+x_2^2+(x_3-x_3)^2} = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$$

$$|z|^2 = x^2+y^2$$

$$\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2-2x_3+1} = \sqrt{|z|^2+1}\cdot(1-x_3)$$

$$\sqrt{2(1-x_3)} = \sqrt{|z|^2+1}\cdot(1-x_3) \quad /^2$$

$$2(1-x_3) = (1+|z|^2)(1-x_3)^2$$

$$2 = (1+|z|^2)(1-x_3)$$

$$1-x_3 = \frac{2}{1+|z|^2}$$

$$x_3 = 1 - \frac{2}{1+|z|^2} = \frac{|z|^2-1}{1+|z|^2}$$

$$z = \frac{x_1+ix_2}{1-x_3} = \frac{x_1+ix_2}{\frac{2}{1+|z|^2}}$$

$$z = (1+|z|^2)\,\frac{x_1+ix_2}{2}$$

$$x_1+ix_2 = \frac{2z}{1+|z|^2} = \frac{2x}{1+|z|^2} + i\cdot\frac{2y}{1+|z|^2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2x}{1+|z|^2} = \frac{2\cdot \mathrm{Re}\, z}{1+|z|^2} = \frac{z+\bar{z}}{1+|z|^2}$$

$$x_2 = \frac{2y}{1+|z|^2} = \frac{2\,\mathrm{Im}\, z}{1+|z|^2} = \frac{z-\bar{z}}{i(1+|z|^2)}$$

в) права кроз $S(0,0,-1)$ и $p(x_1,x_2,x_3)$:

$$\frac{X-0}{x_1-0} = \frac{Y-0}{x_2-0} = \frac{Z+1}{x_3+1} = k \qquad (X,Y,Z)\in\mathbb{R}^3,\ k\in\mathbb{R}$$

$X = kx_1$

$Y = kx_2$

$Z = k(x_3+1)-1$

$\varphi_S(N) = 0$

$$\varphi_S(x_1,x_2,x_3) = \left(\frac{x_1}{1+x_3}, \frac{x_2}{1+x_3}, 0\right), \quad \varphi_S(S) = \infty$$

Пресек праве и равни Oxy : $X=x,\ Y=y,\ Z=0 \Rightarrow k = \frac{1}{1+x_3},\ x = \frac{x_1}{1+x_3}$

$y = \frac{x_2}{1+x_3}$

δ) $\sigma(z_1,z_2)=|p_1-p_2|$

$$p_1=(x_1,x_2,x_3)\ ,\ p_2=(x_1',x_2',x_3')\qquad \varphi_N(p_1)=z_1\ ,\ \varphi_N(p_2)=z_2$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\ ,\ x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2=1$$

$$\sigma(z_1,z_2)=\sqrt{(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+(x_3-x_3')^2}=\sqrt{2-2(x_1x_1'+x_2x_2'+x_3\cdot x_3')}$$

$$=\sqrt{2-2\left(\frac{z_1+\bar z_1}{1+|z_1|^2}\cdot\frac{z_2+\bar z_2}{1+|z_2|^2}+\frac{z_1-\bar z_1}{i(1+|z_1|^2)}\cdot\frac{z_2-\bar z_2}{i(1+|z_2|^2)}+\frac{|z_1|^2-1}{1+|z_1|^2}\cdot\frac{|z_2|^2-1}{1+|z_2|^2}\right)}$$

$$=\sqrt{2-2\left(\frac{\cancel{z_1z_2}+\bar z_1z_2+z_1\bar z_2+\cancel{\bar z_1\bar z_2}-(\cancel{z_1z_2}-\bar z_1z_2-z_1\bar z_2+\cancel{\bar z_1\bar z_2})+|z_1|^2|z_2|^2-|z_1|^2-|z_2|^2+1}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}\right)}$$

$$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{\cancel{1}+|z_1|^2+|z_2|^2+\cancel{|z_1|^2|z_2|^2}-2\bar z_1z_2-2z_1\bar z_2-\cancel{|z_1|^2|z_2|^2}+|z_1|^2+|z_2|^2-\cancel{1}}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}$$

$$=\frac{\sqrt2}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|)^2}}\cdot\sqrt{(|z_1|^2+|z_2|^2-z_1\bar z_2-\bar z_1z_2)2}=\frac{2\,|z_1-z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}$$

jep $|z_1-z_2|^2=|z_1|^2-z_1\bar z_2-\bar z_1z_2+|z_2|^2$

$$\sigma(z,\infty)=|p_1-p_2|\qquad \varphi_N(p_1)=z\ ,\ \varphi_N(p_2)=\infty\qquad p_2=N=(0,0,1)$$

$$\sigma(z,\infty)=\sqrt{x_1^2+x_2^2+(x_3-1)^2}=\sqrt{1-2x_3+1}=\sqrt{2-2x_3}=\sqrt2\sqrt{1-x_3}$$

$$=\sqrt2\sqrt{\frac{2}{1+|z|^2}}=\frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}$$

$$\sigma\left(\frac{1}{z_1},\frac{1}{z_2}\right)=\frac{2\left|\frac{1}{z_1}-\frac{1}{z_2}\right|}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{|z_1|^2}\right)\left(1+\frac{1}{|z_2|^2}\right)}}=\frac{\frac{2\,|z_2-z_1|}{|z_1z_2|}}{\frac{\sqrt{1+|z_1|^2}\,\sqrt{1+|z_2|^2}}{|z_1z_2|}}=\sigma(z_1,z_2)$$