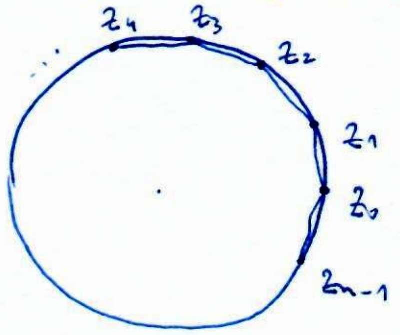
⑦ Одредити производ дужина свих дијагонала и страница правилног n-тоугла који је уписан у јединичну кружницу.



$$z_0 = 1$$

$$z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

дужина странице је

$$a = |z_1 - z_0| = \left|\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} - 1\right|$$

$$= \sqrt{\left(\cos\frac{2\pi}{n} - 1\right)^2 + \left(\sin\frac{2\pi}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\cos^2\frac{2\pi}{n} - 2\cos\frac{2\pi}{n} + 1 + \sin^2\frac{2\pi}{n}}$$

$$= \sqrt{2 - 2\cos\frac{2\pi}{n}} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{1 - \cos\frac{2\pi}{n}}$$

$$= \sqrt{2}\cdot\sqrt{2\sin^2\frac{\pi}{n}} = 2\cdot\left|\sin\frac{\pi}{n}\right|$$

$$d_k = |z_k - z_0|$$

$$d_k = \sqrt{\left(\cos\frac{2k\pi}{n} - 1\right)^2 + \left(\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^2}$$

$$d_k = \sqrt{2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n}}$$

$$d_k = \sqrt{2}\cdot\sqrt{1 - \cos\frac{2k\pi}{n}}$$

$$d_k = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2\cdot\sin^2\frac{k\pi}{n}}$$

$$\boxed{d_k = 2\cdot\left|\sin\frac{k\pi}{n}\right|}$$

$\Pi_0 = \prod_{k=1}^{n-1} d_k$ производ свих које излазе из z_0!

$$\Pi_0 = \prod_{k=1}^{n-1} 2\cdot\left|\sin\frac{k\pi}{n}\right|$$

Производ свих који излазе из z_k (Π_k), $k\in\{1,\dots,n-1\}$ је исти као и производ Π_1, јер је правилан n-тоугао!

Ако помножимо свих n производа испоставиће се да смо сваку дуж рачунали двапута, па је

$$\Pi = \sqrt{\Pi_0\cdot\Pi_1\cdot\Pi_2\cdots\Pi_{n-1}} = \sqrt{\Pi_0^{\,n}} = \Pi_0^{\frac{n}{2}}$$

Дакле,

$$\Pi = \left(\prod_{k=1}^{n-1} 2\left|\sin\frac{k\pi}{n}\right|\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$\Pi = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot\left(\prod_{k=1}^{n-1}\left|\sin\frac{k\pi}{n}\right|\right)^{\frac{n}{2}}$$

(8) Нека су $z, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ и $z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n = 0$.

Доказати: $|z| \leq 2 \cdot \max\limits_{1 \leq j \leq n} |c_j|^{\frac{1}{j}}$.

Означимо: $M = \max\limits_{1 \leq j \leq n} |c_j|^{\frac{1}{j}}$

· За $z = 0$ тривијално важи

· За $z \neq 0$ $\quad z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n = 0$

$$\underbrace{z^n}_{\neq 0}\left(1 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots + \frac{c_n}{z^n}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots + \frac{c_n}{z^n} = 0$$

$$\left|1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{z^k}\right| = 0$$

$$0 = \left|1 - \left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{z^k}\right)\right| \geq 1 - \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{z^k}\right|$$

$$\Rightarrow \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{z^k}\right| \geq 1$$

$$1 \leq \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{z^k}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{c_k^{\frac{1}{k}}}{z}\right)^k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{c_k^{\frac{1}{k}}}{z}\right|^k \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{M^k}{|z|^k} \quad (*)$$

Ако пп. супротно да је $|z| > 2M$ онда је $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{M^k}{|z|^k} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$

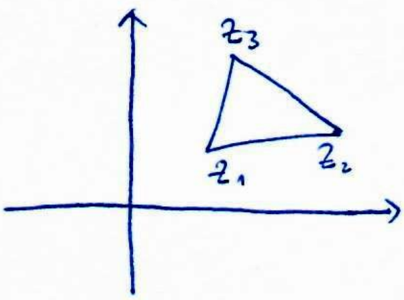
$$< \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

и што нам даје контрадикцију са (*).

$$\Rightarrow \boxed{|z| \leq 2 \cdot M}$$

9. Ако су z_1, z_2, z_3 темена $\triangle ABC$ у $\mathbb{C}$ доказати:

$\triangle ABC$ је једнакостраничан $\iff z_1^2+z_2^2+z_3^2 = z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3$



$\alpha = z_2 - z_1,\ \beta = z_3 - z_2,\ \gamma = z_1 - z_3,\ \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{C}$

странице: $|\alpha|, |\beta|, |\gamma|$

$\alpha+\beta+\gamma = 0$

$\bar\alpha+\bar\beta+\bar\gamma = 0$

$|\alpha|^2 = \alpha\bar\alpha$

$\boxed{\Rightarrow:}$ ак. $\triangle ABC$ је једнакостраничан $|\alpha| = |\beta| = |\gamma| = k$

$\alpha+\beta+\gamma = 0$

$\bar\alpha+\bar\beta+\bar\gamma = 0$

$$\frac{\alpha\cdot\bar\alpha}{\alpha} + \frac{\beta\cdot\bar\beta}{\beta} + \frac{\gamma\bar\gamma}{\gamma} = 0 \Rightarrow \frac{|\alpha|^2}{\alpha} + \frac{|\beta|^2}{\beta} + \frac{|\gamma|^2}{\gamma} = 0 \quad /:k^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0 \quad /\cdot\alpha\beta\gamma$$

$$\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta = 0$$

$$(z_3-z_2)(z_1-z_3) + (z_2-z_1)(z_1-z_3) + (z_2-z_1)\cdot(z_3-z_2) = 0$$

$$z_3z_1 - z_2z_1 - z_3^2 + \cancel{z_2z_3} + \cancel{z_2z_1} - z_1^2 - \cancel{z_2z_3} + \cancel{z_1z_3} + z_2z_3 - \cancel{z_1z_3} - z_2^2 + z_1z_2 = 0$$

$$z_3z_1 - z_3^2 - z_1^2 + z_2z_3 - z_2^2 + z_1z_2 = 0$$

$$\boxed{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1}$$

$\boxed{\Leftarrow:}$ Показати од десне стране добијамо $\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \alpha\beta + (\alpha+\beta)\gamma = 0 \\ \alpha+\beta+\gamma = 0 \text{ (знамо)} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha\beta = \gamma^2$$

аналогно $\alpha\gamma = \beta^2$

$\beta\gamma = \alpha^2$

Аналогно:

$|\alpha|^2|\beta|^2|\gamma|^2 = |\beta|^6$

$|\alpha|^2|\beta|^2|\gamma|^2 = |\gamma|^6$

$\Updownarrow$

$|\alpha| = |\beta| = |\gamma|$.

$$|\alpha|^2|\beta|^2|\gamma|^2 = \alpha\bar\alpha\beta\bar\beta\gamma\bar\gamma = \alpha\beta\gamma\,\overline{\alpha\beta\gamma} = \gamma^3\cdot\overline{\gamma^2}\cdot\bar\gamma = (\gamma\cdot\bar\gamma)^3 = |\gamma|^6$$

■

(10) Ако је $\omega \neq 1$ n-ти корен из 1, доказати да је:

$$(\omega-1)\cdot(1+2\omega+3\omega^2+\dots+n\omega^{n-1})=n$$

$\omega = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ за неко $k\neq 0$

$$\left.\begin{aligned}&\omega^n=1\\ 0=\omega^n-1&=(\omega-1)(\omega^{n-1}+\omega^{n-2}+\dots+\omega+1)\end{aligned}\right\}\ \text{знамо}$$

Директним множењем у изразу са леве стране добијамо:

$$\omega+2\omega^2+3\omega^3+\dots+n\omega^n-1-2\omega-3\omega^2-\dots-n\omega^{n-1}$$

$$=\underbrace{-1-\omega-\omega^2-\omega^3-\dots-\omega^{n-1}}_{=0}+n\omega^n=n\cdot\underbrace{\omega^n}_{=1}=n$$

(11) Ако је $\xi=e^{i\frac{2\pi}{n}}$ и $|z-\xi^k|\leq 1$, $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$, доказати да је $z=0$.

$$|z-\xi^k|^2\leq 1$$

$$(z-\xi^k)(\overline{z-\xi^k})\leq 1$$

$$z\bar z-\bar z\xi^k-z\bar\xi^k+\underbrace{|\xi^k|^2}_{=1}\leq 1$$

$$|z|^2-\bar z\xi^k-z\bar\xi^k+1\leq 1$$

$$|z|^2\leq\bar z\xi^k+z\bar\xi^k \quad /\sum_{k=0}^{n-1}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}|z|^2\leq\bar z\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\xi^k}_{=0}+z\cdot\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\bar\xi^k}_{=0}=0 \quad\Rightarrow n|z|^2=0$$

$$\Rightarrow \boxed{z=0}$$

$$\xi^0+\xi^1+\xi^2+\dots+\xi^{n-1}=\frac{1-\xi^n}{1-\xi}=0$$

$$\bar\xi^0+\bar\xi^1+\bar\xi^2+\dots+\bar\xi^{n-1}=\frac{1-\bar\xi^n}{1-\bar\xi}=0$$

јер $\xi^n=1$

$\bar\xi^n=1$

(12) Нека је $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$ и f, g су полиноми са реалним коефицијентима тд. тачке $(f(1),g(1)), (f(2),g(2)), \dots, (f(n),g(n))$ представљају темена правилног n-тоугла у $\mathbb{R}^2$ поређани у позитивном смеру.

Доказати: $\max\{\deg f, \deg g\} \geq n-1$.

Пређимо у $\mathbb{C}$: $(f(j),g(j)) \longmapsto f(j)+ig(j)$, $j=1,\dots,n$

$h(z) = f(z)+ig(z)$ полином са коеф. у $\mathbb{C}$

$\deg h = \max\{\deg f, \deg g\}$

Треба доказати: $\deg h \geq n-1$.

$h(1), h(2), \dots, h(n)$ су темена правилног n тоугла поређана у позитивном смеру

* n тоугао ћемо транслирати тд. му центар дође у 0 и хомотетијом га трансформисати да темена падну на јединичну кружницу, а затим заротирати тд. темена буду баш n-ти корени из 1

транслација у $\mathbb{C}$ → додавање комплексног броја

ротација + хомотетија у $\mathbb{C}$ → множење комплексним бројем

$$\Rightarrow (\exists a,b \in \mathbb{C}) \quad \begin{aligned} a\cdot h(1)+b &= \xi \\ a\cdot h(2)+b &= \xi^2 \\ &\vdots \\ a\cdot h(n-1)+b &= \xi^{n-1} \\ a\cdot h(n)+b &= \xi^n = 1 \end{aligned}$$

Полином $p(z)=ah(z)+b$ има степен $\deg h$ и $p(k)=\xi^k$, $k \in \{1,\dots,n\}$

$p(k+1) = \xi^{k+1} = \xi \cdot \xi^k = \xi \cdot p(k)$

$p(k+1) - \xi \cdot p(k) = 0$, $k \in \{1, \dots$

Полином $q(z) = p(z+1) - \xi \cdot p(z)$ има бар $n-1$ нула.

$\Rightarrow \deg \mathfrak{z} \geqslant n-1$

Знамо $\deg p = \deg h$. У каквој су вези $\deg p$ и $\deg \mathfrak{z}$?

$$p(z) = c_d z^d + \ldots + c_1 z + c_0 \quad , d = \deg p \quad , c_d \neq 0$$

$$\mathfrak{z}(z) = p(z+1) - \xi \cdot p(z) = c_d (z+1)^d + \ldots + c_1 (z+1) + c_0 - \xi \cdot (c_d z^d + \ldots + c_1 z + c_0)$$

$$\mathfrak{z}(z) = (1-\xi) \cdot c_d \cdot z^d + \ldots$$

$\Rightarrow \deg \mathfrak{z} = \deg p = d$ јер $(1-\xi) \cdot c_d \neq 0$

$\Rightarrow \boxed{\deg h \geqslant n-1}$