Задатак 4

① Нека је $r>0$. Доказати да важи:

$$\left|\int_\gamma e^{iz^2}dz\right| \le \frac{\pi}{4r}\left(1-e^{-r^2}\right)$$

где је $\gamma(t)=re^{it}$ за све $t\in[0,\frac{\pi}{4}]$.

$$\left|\int_\gamma e^{iz^2}dz\right| \underset{\text{ОИН}}{\le} \int_\gamma |e^{iz^2}||dz| = \int_\gamma e^{\mathrm{Re}(iz^2)}|dz|$$

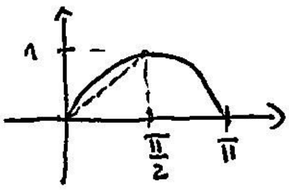
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\mathrm{Re}(i\cdot(re^{it})^2)}|r\cdot ie^{it}|dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\mathrm{Re}(i\cdot r^2 e^{2it})}\cdot r\,dt$$

$$= r\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\mathrm{Re}(r^2\cdot(i\cos 2t-\sin 2t))}dt$$

$$= r\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-r^2\sin 2t}dt$$

Треба нам неко довољно добро ограничење за sin, али одоздо (због −).



слика нас мотивише да покажемо да је на $[0,\frac{\pi}{2}]$ график sin изнад праве која спаја тачке $(0,0)$ и $(\frac{\pi}{2},1)$ тј.

да је на $[0,\frac{\pi}{2}]$ испуњено:

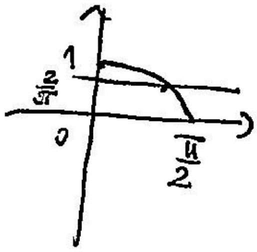
$$\sin x \ge \frac{2}{\pi}\cdot x$$

$y=\frac{2}{\pi}\cdot x$ је права која спаја $(0,0)$ и $(\frac{\pi}{2},1)$

Посматрајмо функцију $\varphi(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

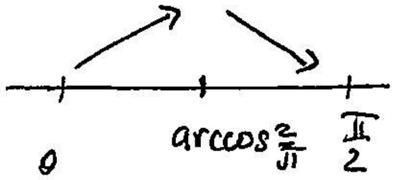
$\varphi(0) = 0$

$\varphi(\frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{\pi} = 0$



$\varphi'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi} \geqslant 0$ за $\cos x \geqslant \frac{2}{\pi}$ тј. $x \in [0, \arccos\frac{2}{\pi}]$, па φ расте на том интервалу

$\varphi'(x) < 0$ за $x \in (\arccos\frac{2}{\pi}, \frac{\pi}{2}]$, па φ опада на том интервалу



$\varphi(0) = \varphi(\frac{\pi}{2}) = 0 \Longrightarrow \varphi(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Дакле, заиста је $\sin x \geqslant \frac{2}{\pi}x$, $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

! корисна неједнакост (запамтити)

Сада можемо да наставимо задатак:

$$\sin 2t \geqslant \frac{2}{\pi}\cdot 2t, \quad \forall t \in [0, \frac{\pi}{4}]$$

$$-\sin 2t \leq -\frac{4t}{\pi}$$

$$e^{-r^2 \sin 2t} \leq e^{-r^2\frac{4t}{\pi}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-r^2 \sin 2t}\,dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{4r^2}{\pi}\cdot t}\,dt = \frac{e^{\frac{-4r^2}{\pi}t}}{\frac{-4r^2}{\pi}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{-\pi}{4r^2}\cdot\left(e^{-r^2} - 1\right)$$

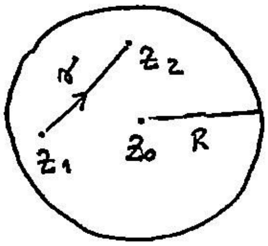
$$\Longrightarrow \quad r\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-r^2\sin 2t}\,dt \leq \frac{\pi}{4r}\left(1 - e^{-r^2}\right)$$

па и $\left|\int_\gamma e^{iz^2}\,dz\right| \leq \frac{\pi}{4r}\left(1 - e^{-r^2}\right)$.

② Нека је $f: D \to \mathbb{C}$ холоморфна функција, где је D отворен диск у $\mathbb{C}$, при чему важи $\mathrm{Re} f'(z) > 0 \ \forall z \in D$. Доказати да је f инјективна.

$$f \text{ 1-1 на } D \iff (\forall z_1, z_2 \in D)\ f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$$

$$\iff (\forall z_1, z_2 \in D)\ z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$$



$D = D(z_0, R)$

Нека $z_1, z_2 \in D(z_0, R)$ и $z_1 \neq z_2$.

Докажимо $f(z_1) \neq f(z_2)$.

$$|f(z_2) - f(z_1)| \underset{?}{>} 0$$

Нека је $\gamma(t) = (1-t) z_1 + t z_2$, $t \in [0,1]$, дуж која спаја z_1 и z_2

тј. $\gamma(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$, $t \in [0,1]$. $\quad (\gamma'(t) = z_2 - z_1)$

Пошто је $z_1, z_2 \in D$, то је дуж у D тј. $\gamma([0,1]) \subseteq D$, па је $\mathrm{Re} f'(\gamma(t)) > 0 \ \forall t \in [0,1]$.

(јер је D конвексан скуп у ствари)

$$|f(z_2) - f(z_1)| = |f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))| = \left| \int_\gamma f'(z)\,dz \right|$$

$$= \left| \int_0^1 f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt \right| = |z_2 - z_1| \cdot \left| \int_0^1 f'(\gamma(t))\,dt \right|$$

$$= |z_2 - z_1| \cdot \left| \int_0^1 \left(\mathrm{Re} f'(\gamma(t)) + i \cdot \mathrm{Im} f'(\gamma(t)) \right) dt \right|$$

$$\geq \underbrace{|z_2 - z_1|}_{>0} \cdot \int_0^1 \underbrace{\mathrm{Re} f'(\gamma(t))}_{>0}\,dt > 0$$

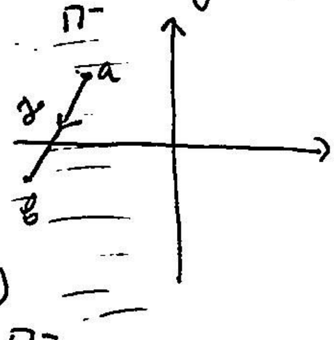
непрекидна

$$\Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$$

Дакле, f је 1-1.

+ погледати зад 5.15. у Бобановој збирци

③ Нека је $\Pi^- = \{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} z<0\}$ лева полураван. Доказати да за све $a,b\in\Pi^-$ важи $|e^a - e^b| \le |a-b|$.



$\gamma(t) = a + (b-a)t$ права која спаја a и b

$\gamma(0)=a$, $\gamma(1)=b$, $\gamma([0,1])\subseteq \Pi^-$ (Π^- конвексан)

$\operatorname{Re}(\gamma(t))<0$ јер је крива тј. дуж је у Π^-

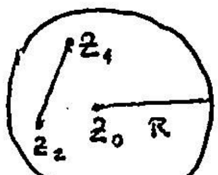
$$|e^a-e^b| = |e^{\gamma(1)}-e^{\gamma(0)}| = \left|\int_\gamma (e^z)'\,dz\right| = \left|\int_\gamma e^z\,dz\right| \underset{\text{ОНН}}{\le} \int_\gamma |e^z|\,|dz|$$

$$= \int_\gamma e^{\operatorname{Re} z}\,|dz| = \int_0^1 e^{\operatorname{Re}\gamma(t)}\,|\gamma'(t)|\,dt \underset{e^{\operatorname{Re}\gamma(t)}<e^0=1}{\le} \int_0^1 |\gamma'(t)|\,dt = |b-a|$$

дужина криве је тј. дужина дужи која спаја a и b

④ Нека је $R>0$, $z_0\in\mathbb{C}$ и $f: D(z_0,R)\to\mathbb{C}$ холоморфна ф-ја такву да важи $|f'(z)-f'(z_0)|<|f'(z_0)|$, $\forall z\in D(z_0,R)$.
Доказати да је функција f инјективна.

Пс. f није инјективна тј. $\exists z_1,z_2\in D(z_0,R)$ $(z_1\ne z_2)$ тд. $f(z_1)=f(z_2)$.



Поново, нека је γ дуж која спаја z_1 и z_2

$$\gamma(t) = z_1 + (z_2-z_1)t,\ t\in[0,1],\quad \gamma([0,1])\subseteq D(z_0,R)$$

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(z_2)-f(z_1) = 0$$

$$\Rightarrow \int_\gamma (f'(z)-f'(z_0))\,dz = -\int_\gamma f'(z_0)\,dz$$

услов (строга је неједнакост јер су под. ф-је непрек.)

$$\left|\int_\gamma (f'(z)-f'(z_0))\,dz\right| \le \int_\gamma |f'(z)-f'(z_0)|\,|dz| < \int_\gamma |f'(z_0)|\,|dz| = |f'(z_0)|\,\ell(\gamma)$$

$$= |f'(z_0)|\cdot|z_2-z_1|$$

тј. $\left|-\int_\gamma f'(z_0)\,dz\right| < |f'(z_0)|\cdot|z_2-z_1| \quad (*)$

$$\gamma'(t) = z_2 - z_1$$

$$\int_\gamma f'(z_0)\,dz = f'(z_0)\cdot\int_\gamma dz = f'(z_0)\cdot\int_0^1 \gamma'(t)\,dt = f'(z_0)\cdot(z_2-z_1)$$

Дакле, $\left|\int_\gamma f'(z_0)\,dz\right| = |f'(z_0)|\cdot|z_2-z_1|$, а што је у контрадикцији са $(*)$.

Напомена: Из овог задатка следи: Ако је $f\in H(\Omega)$, Ω област, $f'(z)\neq 0$ онда је f локално инјективна у Ω.
(свака тачка има околину где је f 1-1)

Доказ:

$z_0\in\Omega$ произвољна

$\varepsilon = |f'(z_0)| > 0$ (јер $f'\neq 0$)

f' непрекидна $\Rightarrow (\exists R>0)\ D(z_0,R)\subset\Omega$ и

$|f'(z)-f'(z_0)| < \varepsilon = |f'(z_0)|$ $\forall z\in D(z_0,R)$

$\Rightarrow$ f је 1-1 на $D(z_0,R)$.

зад. 4