Комплексна анализа, В смер
Септембар 2, 24.09.2021.

1. **а)** Користећи Коши-Риманове услове испитати диференцијабилност и аналитичност функције $f(z) = \cos \overline{z}$.

   б) Нека је $u(x,y) = e^x((x^2 - y^2)\cos y - 2xy \sin y) + \frac{1}{2}\sin 2x \operatorname{ch} 2y$. Доказати да је u хармонијска функција на $\mathbb{C}$, а затим одредити аналитичку функцију f тако да је $\operatorname{Re} f = u$ на $\mathbb{C}$.

2. Одредити све сингуларитете функције $f(z) = \frac{1}{e^{2z} - e^z}$, њихове типове и израчунати вредност интеграла $\int\limits_{|z|=2021} f(z)dz$.

3. У зависности од параметра $n \in \mathbb{N}$, одредити вредност интеграла $\int\limits_0^\pi \sin^{2n} x dx$.

4. **а)** Одредити билинеарно пресликавање f које слика тачке i и 0 редом у i и $\frac{-i}{2}$, а праву $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 1\}$ слика на кружницу $\{z \in \mathbb{C} : |z + \frac{i}{2}| = \frac{3}{2}\}$.

   б) Добијеним пресликавањем f пресликати област $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| < 1, |z| < 1\}$.

5. Доказати да за све $z \in \mathbb{C}$ важи $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y$, а затим одредити максимум функције $f(z) = |\cos z|$ на скупу $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq \ln 2\}$.

Комплексна анализа, В смер
Септембар 2, 24.09.2021.

1. **а)** Користећи Коши-Риманове услове испитати диференцијабилност и аналитичност функције $f(z) = \cos \overline{z}$.

   б) Нека је $u(x,y) = e^x((x^2 - y^2)\cos y - 2xy \sin y) + \frac{1}{2}\sin 2x \operatorname{ch} 2y$. Доказати да је u хармонијска функција на $\mathbb{C}$, а затим одредити аналитичку функцију f тако да је $\operatorname{Re} f = u$ на $\mathbb{C}$.

2. Одредити све сингуларитете функције $f(z) = \frac{1}{e^{2z} - e^z}$, њихове типове и израчунати вредност интеграла $\int\limits_{|z|=2021} f(z)dz$.

3. У зависности од параметра $n \in \mathbb{N}$, одредити вредност интеграла $\int\limits_0^\pi \sin^{2n} x dx$.

4. **а)** Одредити билинеарно пресликавање f које слика тачке i и 0 редом у i и $\frac{-i}{2}$, а праву $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 1\}$ слика на кружницу $\{z \in \mathbb{C} : |z + \frac{i}{2}| = \frac{3}{2}\}$.

   б) Добијеним пресликавањем f пресликати област $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| < 1, |z| < 1\}$.

5. Доказати да за све $z \in \mathbb{C}$ важи $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y$, а затим одредити максимум функције $f(z) = |\cos z|$ на скупу $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Re} z \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq \ln 2\}$.