

**Комплексна анализа, В смер**  
**Јун 2, 01.07.2021.**

1. а) Користећи Коши-Риманове услове испитати непрекидност, диференцијабилност и аналитичност функције

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^2}{|z|}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

- б) Нека је  $R(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}e^{2x}$  и  $x, y > 0$ . Наћи холоморфну функцију  $f$  тако да је  $|f(z)| = R(x, y)$ , где је  $z = x + iy$ .

2. Нека је  $f(z) = (1 - z^2) \frac{\sin \frac{1}{z}}{(\sin z)^2}$ .

- а) Одредити све изоловане сингуларитете дате функције  $f$  и одредити им типове.

- б) Развити функцију  $g(z) = (1 - z^2) \sin \frac{1}{z}$  у Лоранов ред у прстену са центром 0, а затим израчунати интеграл  $\int_{|z|=1} g(z) dz$ .

3. Израчунати интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 2x + 2} dx$ .

4. а) Одредити билинеарно пресликавање  $f$  које слика тачке  $-\frac{1}{2}$  и 0 редом у  $\infty$  и  $4 + i$ , а кружницу  $|z - \frac{1}{2}| = 1$  слика на праву  $\operatorname{Re} z = 1$ .

- б) Добијеним пресликавањем  $f$  пресликати област  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -\frac{3}{2}, |z + \frac{3}{2}| < 1\}$ .

5. Нека је  $f$  цела функција таква да је  $|f(z)| \leq \ln(|z| + 1)$ , за све  $z \in \mathbb{C}$ . Доказати да је  $f$  константна функција.

**Комплексна анализа, В смер**  
**Јун 2, 01.07.2021.**

1. а) Користећи Коши-Риманове услове испитати непрекидност, диференцијабилност и аналитичност функције

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^2}{|z|}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

- б) Нека је  $R(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}e^{2x}$  и  $x, y > 0$ . Наћи холоморфну функцију  $f$  тако да је  $|f(z)| = R(x, y)$ , где је  $z = x + iy$ .

2. Нека је  $f(z) = (1 - z^2) \frac{\sin \frac{1}{z}}{(\sin z)^2}$ .

- а) Одредити све изоловане сингуларитете дате функције  $f$  и одредити им типове.

- б) Развити функцију  $g(z) = (1 - z^2) \sin \frac{1}{z}$  у Лоранов ред у прстену са центром 0, а затим израчунати интеграл  $\int_{|z|=1} g(z) dz$ .

3. Израчунати интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 2x + 2} dx$ .

4. а) Одредити билинеарно пресликавање  $f$  које слика тачке  $-\frac{1}{2}$  и 0 редом у  $\infty$  и  $4 + i$ , а кружницу  $|z - \frac{1}{2}| = 1$  слика на праву  $\operatorname{Re} z = 1$ .

- б) Добијеним пресликавањем  $f$  пресликати област  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -\frac{3}{2}, |z + \frac{3}{2}| < 1\}$ .

5. Нека је  $f$  цела функција таква да је  $|f(z)| \leq \ln(|z| + 1)$ , за све  $z \in \mathbb{C}$ . Доказати да је  $f$  константна функција.