Комплексна анализа Б
Јун 2, 05.07.2021.

1. Израчунати интеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$.

2. Доказати да за свако $a \in \mathbb{C}$ и $n \geq 2$, полином $p(z) = az^n + z + 1$ има бар једну нулу у диску $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$.

3. Нека је $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0, |z| < 1\}$ полудиск у горњој полуравни. Ако је f холоморфна функција из $\mathbb{D}$ у Ω таква да је $f(0) = \frac{i}{2}$, показати да је $|f'(0)| \leq \frac{3}{5}$ и наћи f за које се достиже једнакост.

4. Нека су f и g целе и неконстантне функције, а p и q дати полиноми. Ако важи

$$e^{f(z)} + p(z) = e^{g(z)} + q(z),$$

показати да је $p = q$.

5. Испитати да ли је тачан развој

$$\frac{1}{\operatorname{ch} z - \cos z} = \frac{1}{z^2} + \pi z^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\operatorname{sh} n\pi} \frac{1}{\frac{z^4}{4} + (n\pi)^4}.$$

Комплексна анализа Б
Јун 2, 05.07.2021.

1. Израчунати интеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$.

2. Доказати да за свако $a \in \mathbb{C}$ и $n \geq 2$, полином $p(z) = az^n + z + 1$ има бар једну нулу у диску $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2\}$.

3. Нека је $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0, |z| < 1\}$ полудиск у горњој полуравни. Ако је f холоморфна функција из $\mathbb{D}$ у Ω таква да је $f(0) = \frac{i}{2}$, показати да је $|f'(0)| \leq \frac{3}{5}$ и наћи f за које се достиже једнакост.

4. Нека су f и g целе и неконстантне функције, а p и q дати полиноми. Ако важи

$$e^{f(z)} + p(z) = e^{g(z)} + q(z),$$

показати да је $p = q$.

5. Испитати да ли је тачан развој

$$\frac{1}{\operatorname{ch} z - \cos z} = \frac{1}{z^2} + \pi z^2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{\operatorname{sh} n\pi} \frac{1}{\frac{z^4}{4} + (n\pi)^4}.$$