Комплексна анализа Б
Јунски рок, 17.06.2021.

1. У зависности од параметра $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, израчунати интеграл $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2+a^2)^2\sqrt{x}} dx$.

2. Нека су $m, n \in \mathbb{N}$ произвољни. Доказати да полином $p(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^m}{m!} + 3z^n$ има тачно n нула у јединичном диску $\mathbb{D}$ са центром у 0.

3. Нека је $f(z) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ и $\operatorname{Re} f(z) > 0$ за све $z \in \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Доказати:

   а) $\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq |f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$, за све $z \in \mathbb{D}$.

   б) За $0 < r < 1$ је $|c_n| \leq \frac{1+r}{n! r^n (1-r)}$.

   в) Одредити за које r се достиже минимум израза $\frac{1+r}{n! r^n (1-r)}$ и наћи $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

4. Нека је f цела функција таква да је $f(z) \neq 0$, за све $z \in \mathbb{C}$. Доказати да је $f(z) = ce^z$ за неко $c \in \mathbb{C}$ или функција $f(z) + e^z$ има бесконачно много нула у $\mathbb{C}$.

5. Одредити конформно пресликавање области $\Omega = \mathbb{C} \setminus ([-3i, 3i] \cup [-4, +\infty])$ на горњу полураван $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.

Комплексна анализа Б
Јунски рок, 17.06.2021.

1. У зависности од параметра $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, израчунати интеграл $I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2+a^2)^2\sqrt{x}} dx$.

2. Нека су $m, n \in \mathbb{N}$ произвољни. Доказати да полином $p(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^m}{m!} + 3z^n$ има тачно n нула у јединичном диску.

3. Нека је $f(z) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ и $\operatorname{Re} f(z) > 0$ за све $z \in \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Доказати:

   а) $\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq |f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$, за све $z \in \mathbb{D}$.

   б) За $0 < r < 1$ је $|c_n| \leq \frac{1+r}{n! r^n (1-r)}$.

   в) Одредити за које r се достиже минимум израза $\frac{1+r}{n! r^n (1-r)}$ и наћи $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

4. Нека је f цела функција таква да је $f(z) \neq 0$, за све $z \in \mathbb{C}$. Доказати да је $f(z) = ce^z$ за неко $c \in \mathbb{C}$ или функција $f(z) + e^z$ има бесконачно много нула у $\mathbb{C}$.

5. Одредити конформно пресликавање области $\Omega = \mathbb{C} \setminus ([-3i, 3i] \cup [-4, +\infty])$ на горњу полураван $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.