Комплексна анализа Б
Септембар 0, 28.08.2021.

1. Израчунати интеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{1}{1+x^2} \ln \frac{1-x}{x} dx$

2. Нека је f холоморфна на диску $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ тако да је $|f(z)| < 10$ за све $z \in D_2$. Ако је $f(1) = 0$, наћи најбоље горње ограничење за $|f(\frac{1}{2})|$ и одредити бар једно f за које се достиже то ограничење.

3. Одредити број нула полинома $p(z) = z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2$ у десној полуравни, а затим и у првом квадранту.

4. Испитати тачност следећих тврђења:

   а) Ако је f цела функција и $|\operatorname{Re} f|$ ограничена функција, тада је f константна функција.

   б) Ако је f холоморфна функција на јединичном диску $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и $|\operatorname{Re} f|$ ограничена функција на $\mathbb{D}$, тада је и $|f|$ ограничена функција на $\mathbb{D}$.

   У случају да неко тврђење није тачно, навести бар један контрапример.

5. Нека је $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ дата функција.

   а) Доказати да је f холоморфна на диску $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

   б) Доказати да се f не може аналитички продужити ни на једну област Ω тако да $\mathbb{D} \subsetneq \Omega$.

Комплексна анализа Б
Септембар 0, 28.08.2021.

1. Израчунати интеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{1}{1+x^2} \ln \frac{1-x}{x} dx$

2. Нека је f холоморфна на диску $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ тако да је $|f(z)| < 10$ за све $z \in D_2$. Ако је $f(1) = 0$, наћи најбоље горње ограничење за $|f(\frac{1}{2})|$ и одредити бар једно f за које се достиже то ограничење.

3. Одредити број нула полинома $p(z) = z^4 + 2z^3 + 3z^2 + z + 2$ у десној полуравни, а затим и у првом квадранту.

4. Испитати тачност следећих тврђења:

   а) Ако је f цела функција и $|\operatorname{Re} f|$ ограничена функција, тада је f константна функција.

   б) Ако је f холоморфна функција на јединичном диску $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и $|\operatorname{Re} f|$ ограничена функција на $\mathbb{D}$, тада је и $|f|$ ограничена функција на $\mathbb{D}$.

   У случају да неко тврђење није тачно, навести бар један контрапример.

5. Нека је $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ дата функција.

   а) Доказати да је f холоморфна на диску $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

   б) Доказати да се f не може аналитички продужити ни на једну област Ω тако да $\mathbb{D} \subsetneq \Omega$.