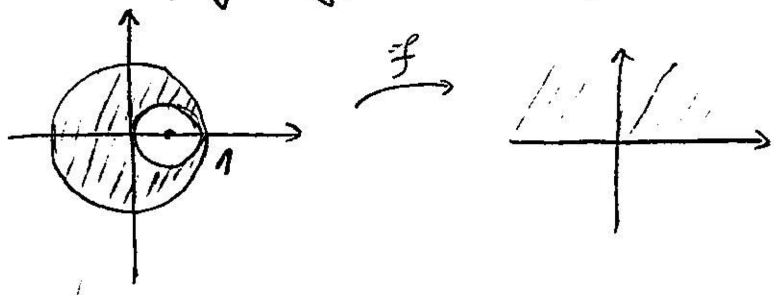
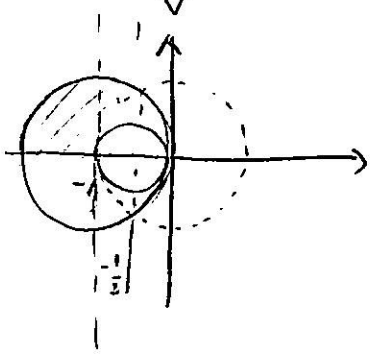
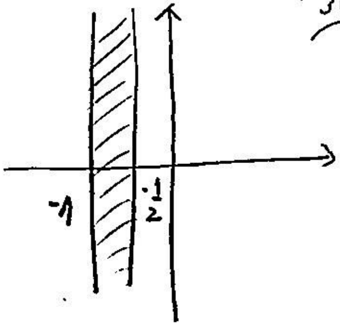
⑤ Одредити бар једну функцију f којом се област $\Omega = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ \left|z - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2} \right\}$ конформно пресликава на горњу полураван $\mathbb{H} = \{ \omega \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \omega > 0 \}$.



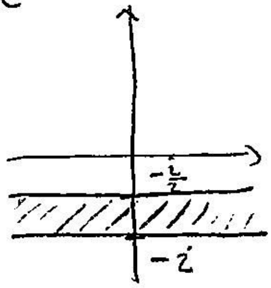
$w_1(z) = z - 1$



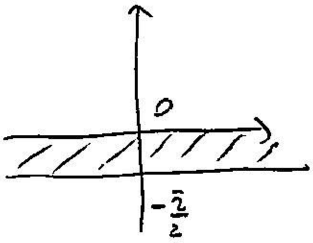
$w_2(w_1) = \overline{\left(\frac{1}{w_1}\right)}$



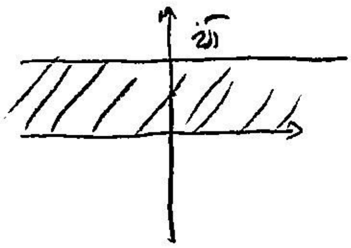
$w_3(w_2) = w_2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = w_2 \cdot i$



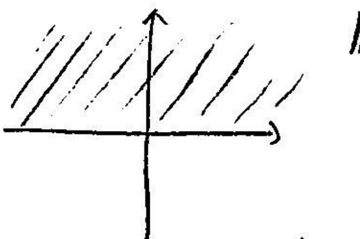
$w_4(w_3) = w_3 + \frac{i}{2}$



$w_5(w_4) = w_4 \cdot (-2\pi)$



$w_6(w_5) = e^{w_5}$



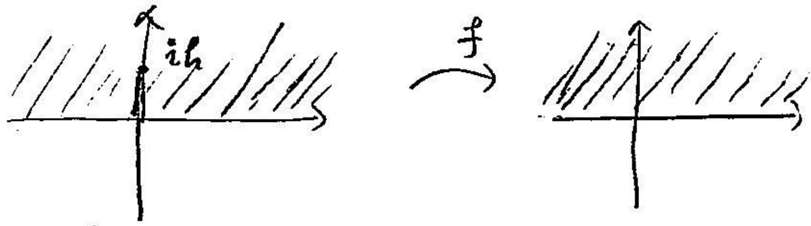
$$\Rightarrow \quad f(z) = e^{-2\pi \cdot \left(\frac{i}{2} + i \cdot \frac{1}{z-1} \right)} = e^{-\cancel{2} i\pi \frac{z-1+2}{\cancel{2}(z-1)}} = e^{-i\pi \frac{z+1}{z-1}}$$

⑥ Одредити бар 1 конформно пресликавање области

$\Omega = \{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z>0\} \setminus \{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} z=0,\ 0\le \operatorname{Im} z\le h\}$, $h>0$

(тј. $\Omega = \mathbb{H}\setminus[0, ih]$)

на горњу полураван $\mathbb{H}=\{w\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} w>0\}$.



$\omega_1(z)=z^2$

$z=\rho e^{i\varphi}$, $z^2=\rho^2 e^{2i\varphi}$

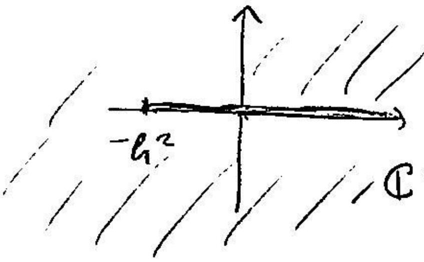
$\varphi\in(0,\pi)$, $2\varphi\in(0,2\pi)$

грана

$\omega_3(\omega_2)=\sqrt{\omega_2}$

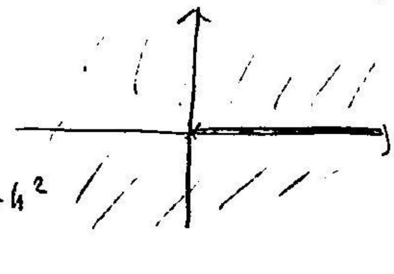
$=\sqrt{|\omega_2|}\, e^{i\frac{\arg \omega_2}{2}}$

$\arg \omega_2\in(0,2\pi)$



$\mathbb{C}\setminus[-h^2,\infty)$

$\omega_2(\omega_1)=\omega_1+h^2$



$\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$

$\Rightarrow\ f(z)=\sqrt{z^2+h^2}$ (грана корена са $\arg(z^2+h^2)\in(0,2\pi)$)

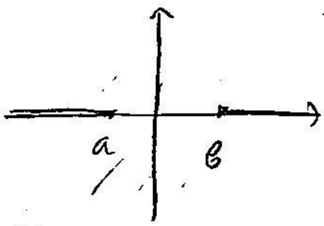
⑦ Одредити бар 1 конформно пресликавање којим се области

а) $\Omega_1=\mathbb{C}\setminus((-\infty,a]\cup[b,\infty))$, $-\infty<a<b<+\infty$

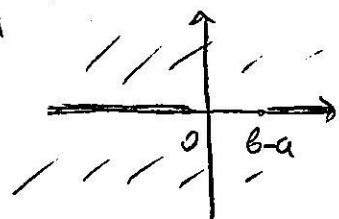
б) $\Omega_2=\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z>0\}\setminus\{e^{i\varphi} : \varphi\in[0,\alpha]\}$, $\alpha\in(0,\pi)$

пресликава на горњу полураван $\mathbb{H}=\{w\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} w>0\}$.

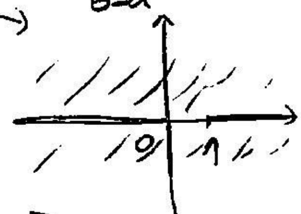
а)



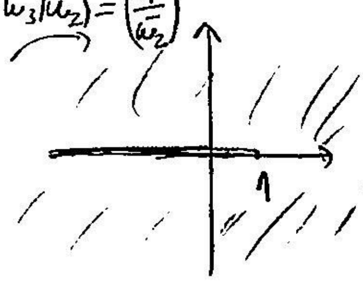
$\omega_1(z)=z-a$



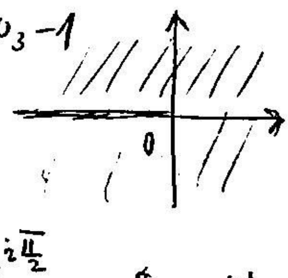
$\omega_2(\omega_1)=\frac{\omega_1}{b-a}$



$\omega_3(\omega_2)=\left(\frac{1}{\omega_2}\right)$

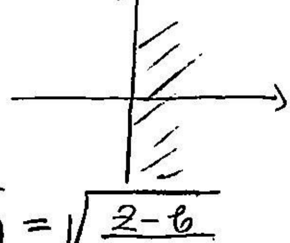


$\omega_4(\omega_3)=\omega_3-1$

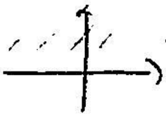


$\omega_5(\omega_4)=\sqrt{\omega_4}$

грана, $\arg \omega_4\in(-\pi,\pi)$

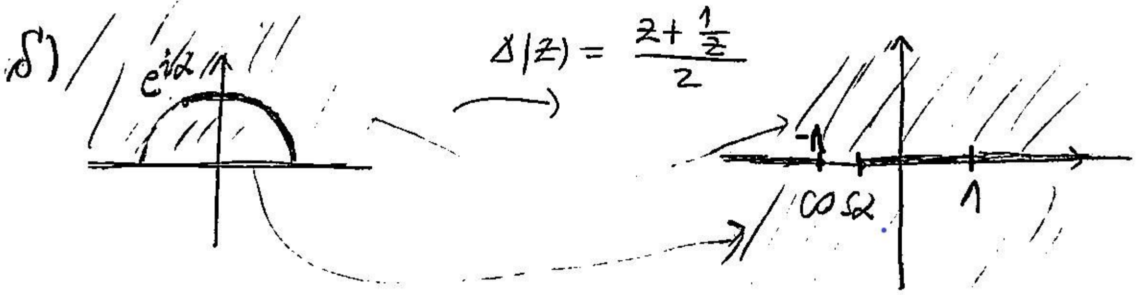


$\omega_5(\omega_4)=\omega_4 e^{i\frac{\pi}{2}}$



$f(z)=i\sqrt{\frac{b-a}{z-a}-1}=\sqrt{\frac{z-b}{z-a}}$

б)



$$\Delta(e^{i\varphi}) = \left(\cos\varphi + i\sin\varphi + \cos\varphi - i\sin\varphi\right)\cdot\frac{1}{2} = \cos\varphi$$

$$\varphi\in[0,\alpha] \Rightarrow \cos\varphi \in [\cos\alpha, 1]$$

$$z = x\in\mathbb{R} \quad \Delta(z) = \frac{z+\frac{1}{z}}{2} = \frac{x+\frac{1}{x}}{2} \geq 1 \quad \text{за } x>0$$

$$\frac{-(-x)-\frac{1}{-x}}{2} = -\left(\frac{-x+\frac{1}{-x}}{2}\right) \leq -1$$

за $x<0$

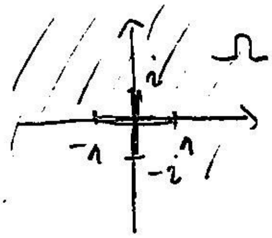
дакле $\Delta(\mathbb{R}) = \mathbb{R}\setminus\left((-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\right)$

$\Rightarrow \Delta(\Omega_2) = \mathbb{C}\setminus\left((-\infty,-1]\cup[\cos\alpha,\infty)\right)$

Сада применимо део под а) на $a=-1$ и $b=\cos\alpha$

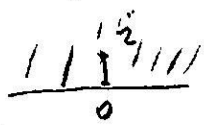
$$\Rightarrow \boxed{f(z) = \sqrt{\frac{\Delta(z)-\cos\alpha}{\Delta(z)+1}}}$$

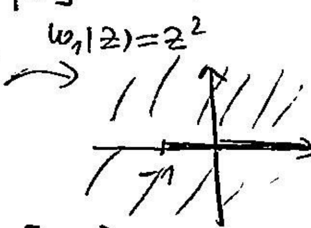
(8) Област $\overline{\mathbb{C}}\setminus\left([-1,1]\cup[-i,i]\right) = \Omega$ пресликати конформно на $\mathbb{D} = \{w\in\mathbb{C} : |w|<1\}$



Нека је $D_1 = \{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z>0\}\setminus[0,i]$

и $D_2 = \{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z<0\}\setminus[-i,0]$





$\omega_1(z) = z^2$ слика D_1 на $\mathbb{C}\setminus([-1,\infty))$

па $\omega_2(\omega_1) = \omega_1+1$ слика на $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$

Затим корен слика на $\mathbb{H}$

(грана корена одр. са $\arg\in(0,2\pi)$)

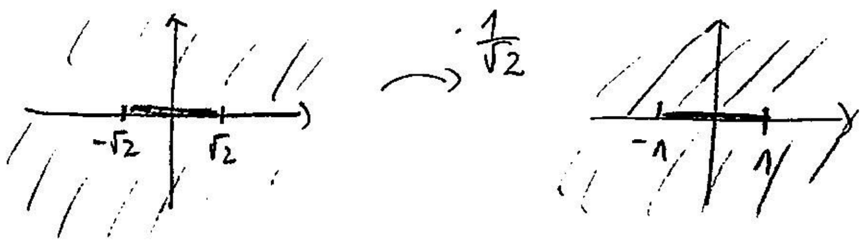
$\omega(z)=\sqrt{z^2+1}$ слика D_1 на $\mathbb{H}$

одсечак $\mathbb{R}\setminus[-1,1]$ се слика на $\mathbb{R}\setminus[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$

На основу принципа симетрије Шварца можемо ω проширити на $D_1\cup D_2\cup \mathbb{R}\setminus[-1,1] = \Omega\setminus\{\infty\}$

$$\omega(\bar{z})=\overline{\omega(z)} \Rightarrow \boxed{\omega(z)=\sqrt{z^2+1}}$$

Слика је тада $\mathbb{C}\setminus[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$



фја Жуковског слика $\mathbb{D}^{\times}=\mathbb{D}\setminus\{0\}$ на $\mathbb{C}\setminus[-1,1]$ и слика $\mathbb{D}$ на $\overline{\mathbb{C}}\setminus[-1,1]$, па грана њене инверзне фје одабрана тако да је $\Delta^{-1}(\infty)=0$ слика $\overline{\mathbb{C}}\setminus[-1,1]$ на $\mathbb{D}$

$\Rightarrow$ тражена фја је $\Delta^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,\omega(z)\right)$

где је Δ^{-1} грана инверзне фје тј. је у ∞ једнака 0, а ω продужење фје $\sqrt{z^2+1}$.

домаћи: Наћи експлицитно Δ^{-1} и одредити која грана слика ∞ у 0.