Квазиконформна пресликавања комплексне равни

деф1: Жорданова крива је слика кружнице хомеоморфним пресликавањем.

Теорема 1: Комплемент Жорданове криве C у равни се састоји од 2 дисјунктна домена, од којих сваки има границу C.

деф2: Жорданов домен је ограничен домен чија је граница Жорданова крива.

деф3. Хомеоморфизам $\omega : \Omega \to \Omega'$ ($\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{C}$) чува оријентацију ако чува оријентацију границе свакој Жордановој домена D тд $\overline{D} \subseteq \Omega$.

Теорема 2 Ако хомеоморфизам $\omega : \Omega \to \Omega'$ има регуларну тачку $z \in \Omega$ тд $J\omega(z) > 0$, тада ω чува оријентацију. Обратно, ако ω чува оријентацију онда је Јакобијан $J\omega(z) > 0$ за сваку регуларну тачку $z \in \Omega$.

(z је регуларна тачка од ω ако је $z \in \operatorname{Int}\Omega$, ω је дифер. у z и $J\omega(z) \neq 0$)

Риманова теорема: Произвољна просто повезана област у $\overline{\mathbb{C}}$ чија граница садржи више од једне тачке, конформно је еквивалентна јединичном диску $\mathbb{D}$.

Каратеодоријева теорема: Нека су Ω и Ω' два Жорданова домена у $\mathbb{C}$ и $f : \Omega \to \Omega'$ конформно пресликавање. Тада се f може проширити до хомеоморфизма $\hat{f} : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega'}$.

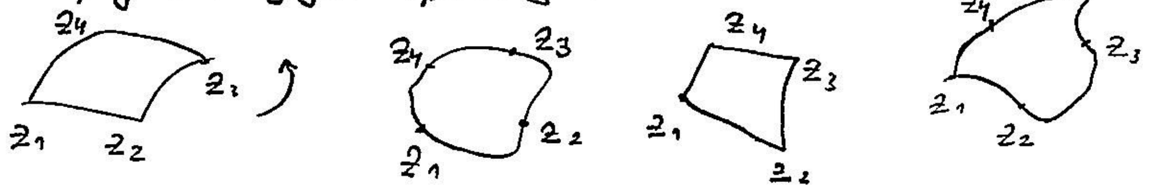
* Жорданов домен је просто повезан!

деф4. Квадрилатерал се састоји од Жордановог домена Q и 4 истакнуте тачке z_1, z_2, z_3 и z_4 на граници.

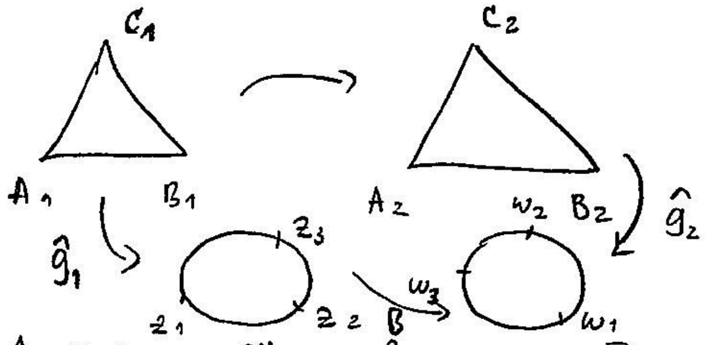
Ознака: $Q(z_1, z_2, z_3, z_4)$

* посматраћемо само квадрилатерале чији се низ врхова слаже са позитивном оријентацијом границе

Примери:



① Ако су дата 2 троугла $\overset{\Delta_1}{\Delta A_1B_1C_1}$ и $\overset{\Delta_2}{\Delta A_2B_2C_2}$, доказати да постоји хомеоморфизам $\hat{f}:\bar{\Delta}_1 \to \bar{\Delta}_2$ тд. $\hat{f}(A_1)=A_2$, $\hat{f}(B_1)=B_2$, $\hat{f}(C_1)=C_2$ и $\hat{f}|_{\Delta_1}=f$ је конформно.



Δ_1 и Δ_2 су Жорданови домени, просто повезане су области, па за њих важе Риманова т. и теорема Каратеодорија.

На основу Риманове теореме постоје g_1 и g_2 конформна пресл.

$g_1:\Delta_1 \to \mathbb{D}$, $g_2:\Delta_2 \to \mathbb{D}$, затим постоје њихова проширења на границе $\hat{g}_1:\bar{\Delta}_1 \to \bar{\mathbb{D}}$ и $\hat{g}_2:\bar{\Delta}_2 \to \bar{\mathbb{D}}$ (Каратеодори) до хомеоморфизама

Нека је $z_1=\hat{g}_1(A_1)$, $z_2=\hat{g}_1(B_1)$ и $z_3=\hat{g}_1(C_1)$, а затим и $w_1=\hat{g}_2(A_2)$, $w_2=\hat{g}_2(B_2)$ и $w_3=\hat{g}_2(C_2)$

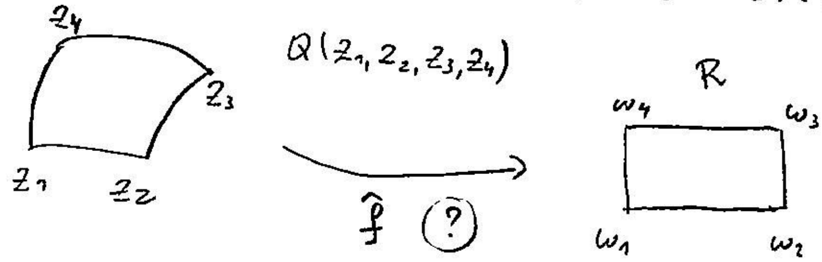
Означимо $\hat{g}_1(\Delta_1)=D_1$ и $\hat{g}_2(\Delta_2)=D_2$

Постоји билинеарно пресликавање $B: D_1 \to D_2$ тд. $B(z_1)=w_1$, $B(z_2)=w_2$ и $B(z_3)=w_3$. (КАА)

(В слика ∂D_1 у ∂D_2, да ли и D_1 слика на D_2?
Ако В мења оријентацију морамо га додатно композовати са пресликавањем $\frac{1}{z}$. Дакле, можемо добити да $B(D_1)=D_2$)

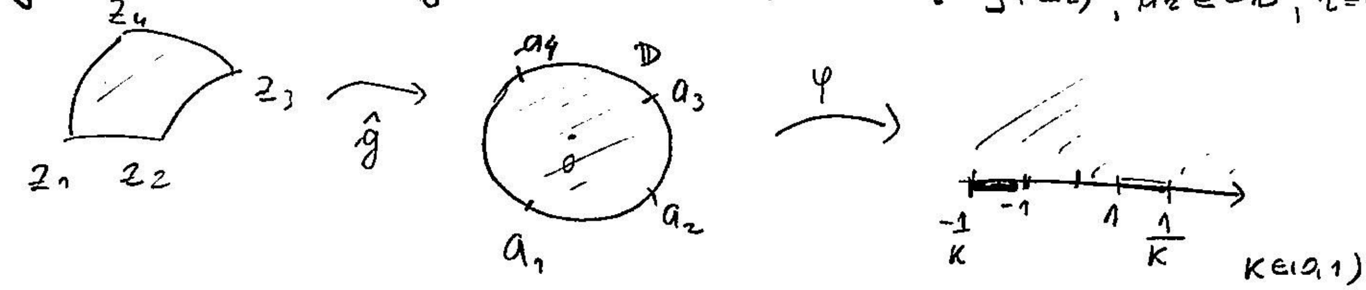
$\hat{f} = \hat{g}_2^{-1}\circ B \circ \hat{g}_1$ слика $\bar{\Delta}_1$ на $\bar{\Delta}_2$ тд. важи тражено!

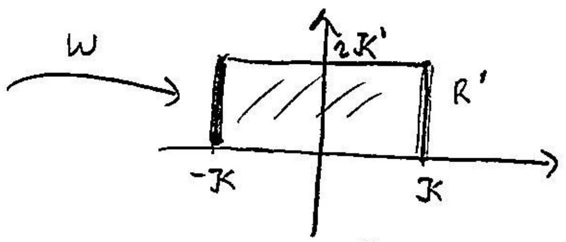
(2) Показати да за сваки квадрилатерал $Q(z_1,z_2,z_3,z_4)$ постоји пресликавање f на неки правоугаоник R, са теменима w_1, w_2, w_3 и w_4 тд. је $f: Q \to R$ конформно и $\hat{f}(z_i)=w_i$. ($\hat{f}: \bar{Q}\to\bar{R}$ хомеоморфизам у складу са теоремом Каратеодорија)



(w_i нису унапред задати темена, зависе од Q)

Q је просто повезан, па на основу Риманове постоји $g: Q \to \mathbb{D}$
(Жорданов је домен, граница садржи ∞ тачака)
конформно и на основу Каратеодоријеве т. може се проширити до хомеоморфизма $\hat{g}: \bar{Q}\to\bar{\mathbb{D}}$. Означимо: $a_i = \hat{g}(z_i)$, $a_i \in \partial\mathbb{D}$, $i=1,2,3,4$





φ слика $\mathbb{D}$ на H тд.

$\hat{\varphi}(a_1) = -\frac{1}{k}$, $\hat{\varphi}(a_2)=-1$

$\hat{\varphi}(a_3)=1$, $\hat{\varphi}(a_4)=\frac{1}{k}$

(такво $\hat{\varphi}$ постоји, доказаћемо у наставку (*))

$$w(z) = \int_0^z \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}$$

$$K = w(1) = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}$$

$$K + iK' = w\left(\frac{1}{k}\right) = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}$$

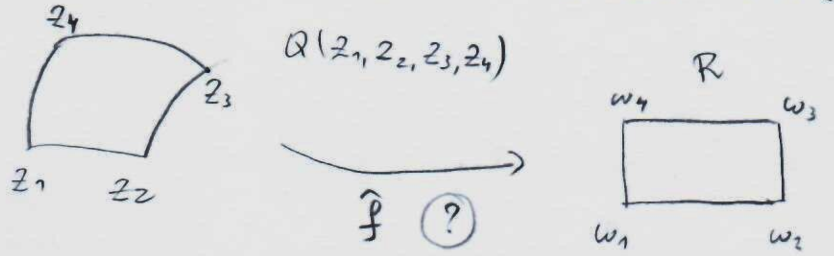
$-K = w(-1)$

$-K + iK' = w\left(\frac{-1}{k}\right)$

(B слика ∂D_1 у ∂D_2, да ли и D_1 слика на D_2?
Ако B мења оријентацију морамо га додатно композовати са пресликавањем $\frac{1}{z}$. Дакле, можемо добити да $B(D_1)=D_2$)

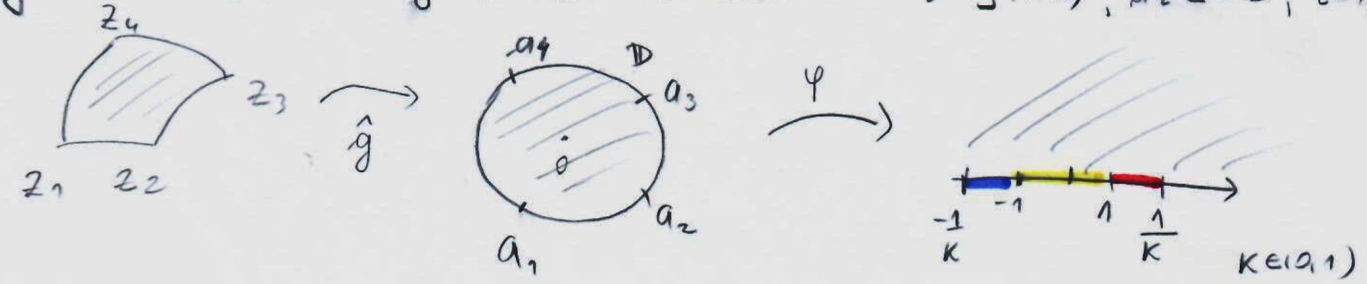
$$\hat{f} = \hat{g}_2^{-1} \circ B \circ \hat{g}_1$$ слика $\bar{\Delta}_1$ на $\bar{\Delta}_2$ тд. важи тражено!

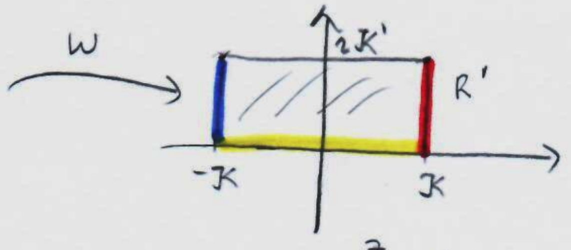
(2) Показати да за сваки квадрилатерал $Q(z_1,z_2,z_3,z_4)$ постоји пресликавање f на неки правоугаоник R, са теменима w_1, w_2, w_3 и w_4 тд. је $f: Q \to R$ конформно и $\hat{f}(z_i)=w_i$. ($\hat{f}: \bar{Q} \to \bar{R}$ хомеоморфизам у складу са теоремом Каратеодорија)



(w_i нису унапред задата темена, зависе од Q)

Q је просто повезан, па на основу Риманове постоји $g: Q \to \mathbb{D}$ (Жорданов је домен, граница садржи ∞ тачака) конформно и на основу Каратеодоријеве т. може се проширити до хомеоморфизма $\hat{g}: \bar{Q} \to \bar{\mathbb{D}}$. Означимо: $a_i = \hat{g}(z_i)$, $a_i \in \partial\mathbb{D}$, $i=1,2,3,4$





φ слика $\mathbb{D}$ на H тд.

$\hat{\varphi}(a_1) = -\frac{1}{k}$, $\hat{\varphi}(a_2) = -1$

$\hat{\varphi}(a_3) = 1$, $\hat{\varphi}(a_4) = \frac{1}{k}$

(такво $\hat{\varphi}$ постоји, доказаћемо у наставку ⊛)

$$w(z) = \int_0^z \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}$$

$$K = w(1) = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}$$

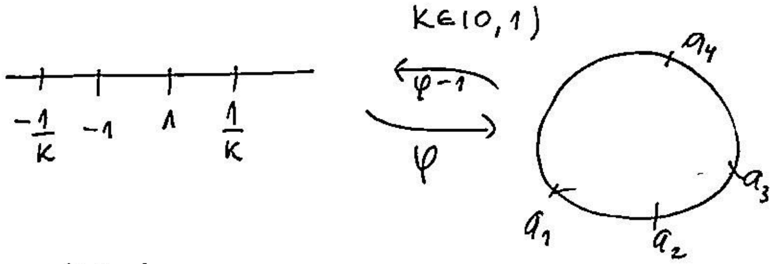
$$K + iK' = w\left(\frac{1}{k}\right) = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}$$

$$-K = w(-1)$$

$$-K + iK' = w\left(\frac{-1}{k}\right)$$

⊛

$k \in (0,1)$



(конформно пресликавање чува оријентацију јер је $J_f = |f_z|^2 > 0$ (због $f_z \neq 0$))

← зато је овај распоред тачака!

$\varphi(-\frac{1}{k}) = a_1$

$\varphi(-1) = a_2$

$\varphi(1) = a_3$

$\varphi(\frac{1}{k}) = a_4$

φ треба да чува дворазмеру (јер је билинеарно)

Дакле, треба да важи:

$$\left[-\frac{1}{k}, -1; 1, \frac{1}{k}\right] = [a_1, a_2, a_3, a_4]$$

Изаберимо k т.д. важи ова једнакост! $\varphi(z)$ ће онда бити дато

сл. једн: $[\varphi(z), a_1; a_2, a_3] = [z, -\frac{1}{k}; -1, 1]$.

Код одабира k треба пазити да се горња полураван слика на $\mathbb{D}$ (уместо доње)!

$$A = [a_1, a_2, a_3, a_4] = \frac{-\frac{1}{k} - 1}{-\frac{1}{k} - \frac{1}{k}} : \frac{-1-1}{-1-\frac{1}{k}} = \frac{-1-k}{-2} : \frac{-2k}{-k-1}$$

$$= \frac{(k+1)^2}{4k}$$

$A \in \mathbb{R}$ јер a_1, a_2, a_3 и a_4 припадају кружници

$$(k+1)^2 = 4kA$$

$$k^2 + 2k - 4kA + 1 = 0$$

$$k^2 + 2k(1-2A) + 1 = 0$$

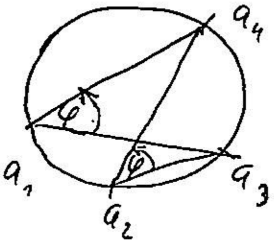
$$k_{1,2} = \frac{-2(1-2A) \pm \sqrt{4(1-2A)^2 - 4}}{2} = 2A - 1 \pm \sqrt{4A^2 - 4A}$$

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= 2A - 1 + 2\sqrt{A(A-1)} \\ k_2 &= 2A - 1 - 2\sqrt{A(A-1)} \end{aligned}\right\}$$ изабере се оно k за које је $\varphi(\mathbb{H}) = \mathbb{D}$!

↓ што је k_2, $k_2 \in (0,1)$!

Још оправдати зашто је $A > 1$? ($k \in (0,1)$ треба нам, $k \in \mathbb{R}$)

$A=[a_1,a_2;a_3,a_4] = \dfrac{a_1-a_3}{a_1-a_4} : \dfrac{a_2-a_3}{a_2-a_4}$



због распореда тачака као на слици

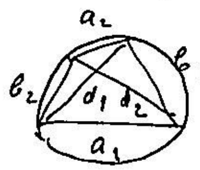
је $\dfrac{a_3-a_1}{a_4-a_1} = \left|\dfrac{a_3-a_1}{a_4-a_1}\right| e^{-i\varphi}$

$$\frac{a_3-a_2}{a_4-a_2} = \left|\frac{a_3-a_2}{a_4-a_2}\right| e^{-i\varphi}$$

$$\Rightarrow A = \frac{|a_1-a_3|}{|a_1-a_4|}\cdot\frac{|a_2-a_4|}{|a_2-a_3|} \overset{?}{>} 1$$

$$\underbrace{|a_1-a_3|\cdot|a_2-a_4|}_{\text{производ дијагонала}} > \underbrace{|a_1-a_4|\cdot|a_2-a_3|}_{\text{производ наспрамних страница}} \quad \checkmark$$

(важи: $d_1 d_2 = a_1a_2 + b_1b_2$ за тетивни четвороугао)



\- w је задато преко елиптичких интеграла
(погледати Ahlfors – complex ANALYSIS)
227 – 232

w је конформно на $\mathbb{H}$

(О елиптичким интегралима: Conformal Invariants, Inequalities and Quasiconformal Maps

CHAPTER 6 (103 страна))