$\boxed{\text{Сферни извод}}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{d(f(z+h),f(z))}{|h|}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{|h|}\cdot\frac{2|f(z+h)-f(z)|}{\sqrt{(1+|f(z+h)|^2)(1+|f(z)|^2)}}$$

$$=\frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$$

Ознака: $S(f):=\frac{2|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}$ (или $f^{\#}$)

$\Omega\subseteq\mathbb{C}$ области, $f\in\mathcal{F}$, $f:\Omega\to(X,d)$

деф: фамилија функција $\mathcal{F}$ је еквинепрекидна на скупу $E\subseteq\Omega$ ако $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall z_0,z\in E)(\forall f\in\mathcal{F})\ |z-z_0|<\delta\Rightarrow d(f(z),f(z_0))<\varepsilon$

* Из деф је јасно да су све $f\in\mathcal{F}$ равномерно непрекидне на E.

Теорема (Арцела–Асколи)

Нека је $\mathcal{F}$ фамилија непрекидних функција из отвореног $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ у метрички простор (X,d). Тада је $\mathcal{F}$ нормална фамилија акко

(i) $\mathcal{F}$ је еквинепрекидна на сваком компакту $K\subseteq\Omega$

и

(ii) $(\forall z\in\Omega)(\exists K\subseteq X, K \text{ компакт})\ \{f(z): f\in\mathcal{F}\}\subseteq K$ (Показати т. Монтела уз помоћ А.А доказ!)

---

① Нека је $\mathcal{F}$ фамилија холоморфних функција на $\Omega\subseteq\overline{\mathbb{C}}$ (Ω произвољан отворен и повезан, област) са вредностима у $\overline{\mathbb{C}}$ (што су у ствари мероморфне функције у $\mathbb{C}$). Ако је $\mathcal{F}$ нормална фамилија, да ли је и $\mathcal{F}'=\{f': f\in\mathcal{F}\}$ обавезно нормална фамилија?

Нека је $f_n(z)=n(z^2-n)$ и $\mathcal{F}=\{f_n: n\in\mathbb{N}\}$ (тражимо пример фамилије за коју ово не важи)

$f_n:\mathbb{C}\to\overline{\mathbb{C}}$ Покажимо да је $\mathcal{F}$ нормална фамилија.

$\lim_{n\to\infty} f_n(z)=\infty$

Нека је $K\subseteq\mathbb{C}$, K компакт и $\varepsilon>0$

Треба наћи $n_0\in\mathbb{N}$ т.д. $(\forall n\geq n_0)(\forall z\in K)\ d(f_n(z),\infty)<\varepsilon$

$$d(f_n(z),\infty)=\frac{2}{\sqrt{1+|f_n(z)|^2}}=\frac{2}{\sqrt{1+n^2|z^2-n|^2}}<\varepsilon$$

$$\sqrt{1+n^2|z^2-n|^2} > \frac{2}{\varepsilon}$$

$n^2|z^2-n|^2 > \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 - 1$ ← то хоћемо да важи

Пошто је $|z^2-n| \geqslant n-|z|^2$ било би довољно нпр. да важи

$(n-|z|^2)^2 > \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 - 1$ и да n буде довољно велико тд. $n > |z|^2$ $\forall z \in K$

<u>Зашто:</u> Нека је $R > 0$ тд. $K \subseteq B(0,R)$ (тада за све $z \in K$ важи $|z| < R$)

и нека је $n_0 = \left[R^2 + \sqrt{\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 - 1}\,\right] + 1$

За све $n \geqslant n_0$ је тада $n-|z|^2 \geqslant n - R^2 \geqslant \sqrt{\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 - 1}$ $/^2$

$$(n-|z|^2)^2 \geqslant \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 - 1$$

па и $n^2 \cdot (n-|z|^2)^2 \geqslant \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^2 - 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{\sqrt{1+n^2|z^2-n|^2}} < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ (f_n) конв. равномерно на K ка ∞.

Докажимо сада да $\mathcal{F}'$ није нормална.

$$f_n'(z) = n \cdot 2z$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(z) = \begin{cases} 0, & z=0 \\ \infty, & z \neq 0 \end{cases}$$

$d(f_n'(z), \infty) = \dfrac{2}{\sqrt{1+4n^2|z|^2}} = 2$ <u>за $z=0$</u>, па f_n' не конв. равномерно ни на једном компакту који садржи 0.

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}'$ није нормална фамилија

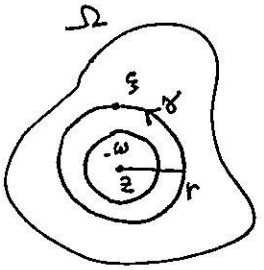
② Ако је $\mathcal{F} \subseteq H(\Omega)$ нормална фамилија ($\Omega \subseteq \mathbb{C}$ област), доказати да је и $\mathcal{F}'$ нормална фамилија.

Нека је $\mathcal{F} \subseteq H(\Omega)$ нормална фамилија. На основу теореме Монтела је она и равномерно ограничена на компактима.

$\mathcal{F}' \subseteq H(\Omega)$ (знамо из КА)

Покажимо да је и $\mathcal{F}'$ равномерно ограничена на компактима, па ћемо поново на основу Монтелове т добити да је и $\mathcal{F}'$ нормална фамилија.

Нека је $z \in \Omega$ и $\overline{D}(z,r) \subseteq \Omega$. Означимо $\gamma = \partial D(z,r)$



КИФ: $f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - w)^2} d\xi$ за $w \in D(z,r)$

ако $w \in D(z, \frac{r}{2})$ онда је $|\xi - w| \geq \frac{r}{2}$ за све $\xi \in \gamma$

$\Rightarrow |f'(w)| \underset{\text{ОИН}}{\leq} \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{|f(\xi)|}{\frac{r^2}{4}} |d\xi| = \frac{4}{2\pi r^2} \cdot \int_\gamma |f(\xi)||d\xi|$

Ако је M_γ ограничење фамилије $\mathcal{F}$ на компакту γ

онда је $|f'(w)| \leq \frac{4}{2\pi r^2} \cdot M_\gamma \cdot 2r\pi = \frac{4M_\gamma}{r}$ $\forall f \in \mathcal{F}$

(За дато $z \in \Omega$ придружимо му r као горе и зовимо r_z.) и за све $w \in D(z, \frac{r}{2})$

Нека је сада $K \subseteq \Omega$ произвољан компакт.

$K \subseteq \bigcup_{z \in K} D(z, \frac{r_z}{2})$, постоји коначно потпокривање скупа K овим дисковима

$\Rightarrow K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} D(z_i, \frac{r_i}{2})$ $(r_{z_i} = r_i)$

Сваком $D(z_i, \frac{r_i}{2})$ одговара M_{γ_i} тд. $|f'(w)| \leq \frac{4M_{\gamma_i}}{r_i} = M_i$

$\forall f' \in \mathcal{F}', \forall w \in D(z_i, \frac{r_i}{2})$

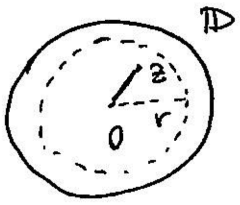
Нека је $M = \max\{M_i : i = 1, 2, \dots, n\}$

Тада је $|f'(w)| \leq M$ $\forall w \in K, \forall f' \in \mathcal{F}'$

па је $\mathcal{F}'$ равн. ограничена.

$\Rightarrow \mathcal{F}'$ је нормална фамилија

③ Нека је $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(\mathbb{D})$ $(\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C} : |z|<1\})$ тд је $f(0)=0$ $\forall f\in\mathcal{F}$. Ако је $\mathcal{F}'=\{f' : f\in\mathcal{F}\}$ нормална фамилија, показати да је и $\mathcal{F}$ нормална фамилија.



$\mathcal{F}'$ је нормална, па је равн.-огр. на компакт.

$K\subseteq\mathbb{D}$ произвољан компакт

$\Rightarrow (\exists r\in(0,1))\ K\subseteq D(0,r)$

Покажимо да је $\mathcal{F}$ равн.-ограничена на $D(0,r)$, па ће бити и на K.

$z\in D(0,r)$ произвољан

дуж која спаја 0 и z је у $D(0,r)$ (нека се зове γ)

$\gamma(0)=0$, $\gamma(1)=z$

$\gamma : [0,1]\mapsto D(0,r)$

$$\underbrace{f(z)-f(0)}_{f(0)=0} = \int_\gamma f'(w)\,dw$$

Нека је M_r горње огр. за $\mathcal{F}'$ на компакту $\overline{D(0,r)}$

$$\Rightarrow |f(z)| \underset{\text{ОИН}}{\le} \int_\gamma |f'(w)||dw| \le M_r\cdot \ell(\gamma) = M_r\cdot|z| \le M_r \quad \text{за } |z|<1$$

тј. за све $z\in D(0,r)\subseteq\mathbb{D}$ па и за све $z\in K$

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ је равномерно ограничена на компактима

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ је нормална

Монтел