$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,-1)$$

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz + \int_{l_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_\varepsilon^-} f(z)\,dz + \int_{l_2} f(z)\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f,-1)$$

$$\mathrm{Res}(f,-1) \underset{\uparrow}{=} \lim_{z\to -1} (z+1)\cdot\frac{1}{z+1}\cdot\frac{1}{g(z)} = \frac{1}{g(-1)} = \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

-1 је пол реда 1

$$g(-1) = \sqrt[3]{1}\cdot e^{i\frac{\arg(-1)}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0$ на основу Жорданове леме 2

јер је $\lim\limits_{z\to\infty} z f(z) = \lim\limits_{z\to\infty} \underbrace{\frac{z}{1+z}}_{\to 1}\cdot \underbrace{\frac{1}{g(z)}}_{g(z)\to\infty} = 0$

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\gamma_\varepsilon^-} f(z)\,dz = 0$ на основу Жорданове леме 1

$z = |z| e^{i\arg z}$

јер је $\lim\limits_{z\to 0} z f(z) = \lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{z+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{|z|}\cdot e^{i\frac{\arg z}{3}}} \overset{\downarrow}{=} 0$

Када $h\to 0$ је:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz + \int_{\gamma_\varepsilon^-} f(z)\,dz + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{1}{(1-t)\sqrt[3]{|t|}\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}}(-dt) + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{1}{(1+t)\sqrt[3]{t}}\,dt = 2\pi i\cdot \mathrm{Res}(f,-1)$$

$\uparrow z = -t - ih$, $dz = -dt$

јер
$$\begin{cases} g(-t-ih) = \sqrt[3]{\sqrt{t^2+h^2}}\, e^{i\frac{\arg(-t-ih)}{3}} \xrightarrow[h\to 0^+]{} \sqrt[3]{|t|}\, e^{i\frac{2\pi}{3}}, \ t<0 \\ g(t+ih) = \sqrt[3]{\sqrt{t^2+h^2}}\, e^{i\frac{\arg(t+ih)}{3}} \xrightarrow[h\to 0^+]{} \sqrt[3]{t}\, e^{0} = \sqrt[3]{t} \end{cases}$$

$$\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{-1}{(1-t)\sqrt[3]{|t|}\, e^{i\frac{2\pi}{3}}}\,dt \underset{\substack{\uparrow\\ u=-t}}{=} \frac{-1}{e^{i\frac{2\pi}{3}}}\cdot \int_{R}^{\varepsilon} \frac{1}{(1+u)\sqrt[3]{u}}(-du)$$

$$= \frac{-1}{e^{i\frac{2\pi}{3}}}\cdot \int_{\varepsilon}^{R} \frac{1}{(1+t)\sqrt[3]{t}}\,dt$$

Сада пустимо лимесе када $R \to +\infty$ и $\varepsilon \to 0^+$ и добија се:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)\sqrt[3]{t}}\,dt - \frac{1}{e^{2i\frac{\pi}{3}}} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)\sqrt[3]{t}} = 2\pi i \cdot \frac{1}{e^{i\pi/3}}$$

$$I \cdot \left(1 - e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right) = 2\pi i \cdot e^{-\frac{i\pi}{3}}$$

$$1 - e^{-2i\frac{\pi}{3}} = 1 - e^{2i\alpha}, \quad \alpha = -\frac{\pi}{3}$$

$$= 1 - \cos 2\alpha - i \sin 2\alpha$$

$$= 2\sin^2\alpha - 2i \sin\alpha \cos\alpha$$

$$= 2\sin\alpha\,(\sin\alpha - i\cos\alpha)$$

$$= -2i\sin\alpha\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$= -2i\sin\alpha \cdot e^{2\alpha} = -2i\sin\frac{-\pi}{3} \cdot e^{i\frac{-\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{-2i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{-2i\sin\frac{-\pi}{3}} = \frac{1}{2i\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow \quad I = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}$$

$R(x)$ рационална ф-ја

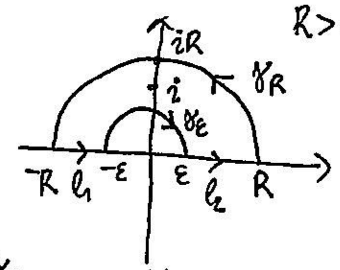
* Интеграли облика $\int_0^{+\infty} R(x)\log x\,dx$, $\int_0^{+\infty} R(x)\log x\cdot x^{-\alpha}dx$, $\alpha\in(0,1)$

(Проучићемо их на примерима)

① Наћи $I=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\log x\,dx$.

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\log x}{1+x^2}dx \qquad R(z)=\frac{1}{1+z^2}$$

$R(x)=\frac{1}{1+x^2}$ парна ф-ја и нема сингуларитета на $\mathbb{R}$ оси



$\gamma_R: z=Re^{it}, t\in[0,\pi]$

$l_1: z=t, t\in[-R,-\varepsilon]$

$\gamma_\varepsilon: z=\varepsilon e^{it}, t\in[0,\pi]$

$l_2: z=t, t\in[\varepsilon,R]$

$g(z)=\log|z|+i\arg z$, $\arg z\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$

- узимамо грану ф-је log која нам највише одговара (овде на $\mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C}: \mathrm{Re}\,z=0, \mathrm{Im}\,z\le 0\}$)
- R има полове у $\pm i$ тј. на имагинарној оси
- користићемо контуру на слици

(од 0 ћемо морати одвојити због log)

функцију $f(z)=\frac{g(z)}{1+z^2}$ интегралимо по контури $\Gamma=\gamma_R+l_1+\gamma_\varepsilon+l_2$ за $R>1$ (тада $i\in\mathrm{Int}\,\Gamma$)

$\varepsilon<\frac{1}{2}$

(сви сингуларитети у горњој полуравни треба да буду у Int Γ.)

$$\int_\Gamma f(z)dz=2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_k)$$, $\{z_1,\dots,z_k\}$ скуп сингулари. ф-је f у $\mathrm{Int}\,\Gamma$

$$\int_\Gamma f(z)dz=2\pi i\cdot\mathrm{Res}(f,i)$$ (овде је i једини сингуларитет)

i је пол реда 1 (проверите)

$$\mathrm{Res}(f,i)=\frac{1}{(1-1)!}\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=\lim_{z\to i}\cancel{(z-i)}\frac{g(z)}{\cancel{(z-i)}(z+i)}=\frac{g(i)}{2i}$$

$$g(i)=\log|i|+i\arg i=i\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Res}(f,i)=\frac{i\pi}{2\cdot 2i}=\frac{\pi}{4}$$

$$\int_\Gamma f(z)dz = \overbrace{\int_{\gamma_R} f(z)dz}^{I_R} + \int_{l_1} f(z)dz + \overbrace{\int_{\gamma_\varepsilon^-} f(z)dz}^{I_\varepsilon^-} + \int_{l_2} f(z)dz$$

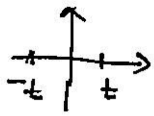
$$= I_R + I_\varepsilon^- + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{g(t)}{1+t^2}dt + \int_\varepsilon^R \frac{g(t)}{1+t^2}dt$$

$$= I_R + I_\varepsilon^- + \int_R^\varepsilon \frac{g(-u)}{1+u^2}(-du) + \int_\varepsilon^R \frac{g(t)}{1+t^2}dt$$

$$\uparrow\ t=-u$$
$$dt=-du$$

$$= I_R + I_\varepsilon^- + \int_\varepsilon^R \frac{g(-u)}{1+u^2}du + \int_\varepsilon^R \frac{g(t)}{1+t^2}dt$$

$$= I_R + I_\varepsilon^- + \int_\varepsilon^R \frac{g(-t)+g(t)}{1+t^2}dt$$



$$g(-t) = \log|t| + i\cdot\arg(-t) = \log t + i\cdot\pi$$
$$g(t) = \log t + i\cdot \arg t = \log t$$

$$\int_\Gamma f(z)dz = I_R + I_\varepsilon^- + \int_\varepsilon^R \frac{2\log t + i\pi}{1+t^2}dt$$

$$\lim_{z\to\infty} z\cdot f(z) = \lim_{z\to\infty} z\cdot\frac{g(z)}{1+z^2} = \lim_{z\to\infty}\frac{z\cdot(\log|z| + i\arg z)}{1+z^2} = 0 \text{ јер } \frac{\log|z|}{|z|}\xrightarrow[|z|\to+\infty]{} 0$$

$$\underset{\text{Жорданова лема 2}}{\Rightarrow} \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$$

$$\lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} z\cdot\frac{g(z)}{1+z^2} = \lim_{z\to 0} z\cdot(\log|z| + i\cdot\arg z) = \lim_{z\to 0} z\cdot\log|z|$$

Знамо $|z|\cdot\log|z| \xrightarrow[z\to 0]{} 0 \Rightarrow \lim_{z\to 0} z f(z) = 0 \underset{\text{Жорданова лема 1}}{\Rightarrow} \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{R\to+\infty} I_R = 0 \\ \lim_{\varepsilon\to 0+} I_\varepsilon^- = 0 \end{cases}$$

$\lim_{R\to\infty}, \lim_{\varepsilon\to 0^+}$ $\Downarrow$

$$\Rightarrow \quad \cancel{2}\pi i\cdot\frac{\pi}{\cancel{4}_{2}} = \int_0^{+\infty}\frac{2\log t + i\pi}{1+t^2}\,dt = 2\cdot\int_0^{+\infty}\frac{\log t\,dt}{1+t^2} + i\pi\cdot\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}$$

Када изједначимо реалне и имагинарне делове обе стране једнак. добијамо: $\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\log t}{1+t^2}\,dt = 0}$, $\pi\cdot\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi^2}{2}$

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$$ (овај се тривијално и рачуна $\operatorname{arctg} t\big|_0^{+\infty}$)

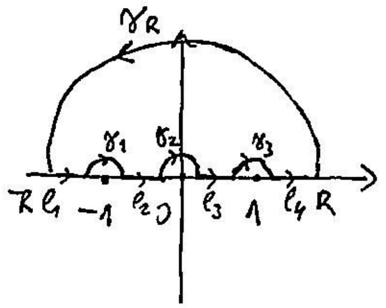
② Израчунати:

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{\log x}{x^2-1}\,dx$$

$R(x) = \frac{1}{x^2-1}$ парна рационална ф-ја

и има полове на реалној оси ± 1 (оба су реда 1)

Идеја је да се интеграли:



$f(z) = \frac{g(z)}{z^2-1}$, $g(z) = \log|z| + i\arg z$, $\arg z \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

по контури на слици

$\gamma_R:\ z = Re^{it},\ t\in[0,\pi]$

$l_1:\ z = t,\ t\in[-R, -1-\varepsilon_1]$

$\gamma_1^-:\ z = \varepsilon_1 e^{it} - 1,\ t\in[0,\pi]$

$(\Gamma = \gamma_R + l_1 + \gamma_1 + l_2 + \gamma_2 + l_3 + \gamma_3 + l_4)$ $\quad l_2:\ z = t,\ t\in[-1+\varepsilon_1, -\varepsilon_2]$

$\gamma_2^-:\ z = \varepsilon_2 e^{it},\ t\in[0,\pi]$

$l_3:\ z = t,\ t\in[\varepsilon_2, 1-\varepsilon_3]$

$\gamma_3:\ z = \varepsilon_3 e^{it} + 1,\ t\in[0,\pi]$

$l_4:\ z = t,\ t\in[1+\varepsilon_3, R]$

f нема полова у горњој полуравни

$$\Rightarrow \int_\Gamma f(z)\,dz = 0$$