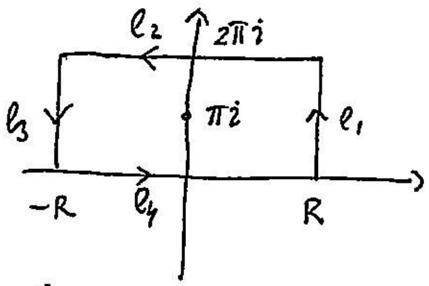
⊛ $0<a<1$ Израчунати: $I=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^{x}}\,dx$

$$f(z)=\frac{e^{az}}{1+e^{z}} \qquad e^{z}=-1 \text{ за } z=i\cdot(\pi+2k\pi),\ k\in\mathbb{Z}$$



$$\Gamma=l_1+l_2+l_3+l_4$$

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}Res(f,z_k) \quad \text{(Кошијева т. о остацима)}$$

$z_1,\dots,z_n$ сингуларитети у $\mathrm{Int}\,\Gamma$

$z=i\pi$ је једини сингуларитет у $\mathrm{Int}\,\Gamma$ (Γ одабрано као што је описано)

$l_1:\ z=R+it,\ t\in[0,2\pi]$

$l_2:\ z=-t+2\pi i,\ t\in[-R,R]$

$l_3:\ z=-R-it,\ t\in[-2\pi,0]$

$l_4:\ z=t,\ t\in[-R,R]$

$$\lim_{z\to i\pi}\frac{e^{az}}{1+e^{z}}=\infty$$ па је $i\pi$ пол фје f

ког реда је тај пол?

$$\lim_{z\to i\pi}(z-i\pi)\frac{e^{az}}{1+e^{z}}=\lim_{z\to i\pi}\frac{(z-i\pi)e^{az}}{1+e^{z}}$$

$g(z)=1+e^{z}$

$g'(z)=e^{z}$

$$\lim_{z\to i\pi}\frac{e^{az}}{\frac{1+e^{z}-(1+e^{i\pi})}{z-i\pi}}=\frac{e^{ai\pi}}{g'(i\pi)}=\frac{e^{ai\pi}}{e^{i\pi}}=\frac{e^{ai\pi}}{-1}\in\mathbb{C}$$

$\Rightarrow$ ред пола је 1

$\uparrow$ има се позвати на тврђење ($Res(\frac{f}{g},z_0)=\frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$ за $f(z_0)\neq 0$, $g(z_0)=0$, $g'(z_0)\neq 0$)

$$Res(f(z),i\pi)=\lim_{z\to i\pi}(z-i\pi)\cdot f(z)=-e^{ai\pi}$$

$$\Rightarrow \int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz=2\pi i\cdot(-e^{ai\pi})=A$$

$$\underbrace{\int\limits_{l_1} f(z)\,dz}_{I_1}+\underbrace{\int\limits_{l_2} f(z)\,dz}_{I_2}+\underbrace{\int\limits_{l_3} f(z)\,dz}_{I_3}+\underbrace{\int\limits_{l_4} f(z)\,dz}_{I_4}=A$$

$$I_1=\int\limits_{\ell_1} f(z)dz=\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{a(R+it)}}{1+e^{R+it}}\,i\,dt=i\cdot\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{aR}e^{ait}}{1+e^Re^{it}}dt$$

$$|I_1|=\left|\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{aR}e^{ait}dt}{1+e^Re^{it}}\right|\underset{\substack{\uparrow\\ \text{ОЦН}}}{\le}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{aR}}{|1+e^Re^{it}|}dt\le\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{aR}}{e^R-1}dt=\frac{e^{aR}}{e^R-1}\cdot 2\pi$$

$$|e^R|-1\le|1+e^Re^{it}|$$

$$\frac{1}{|1+e^Re^{it}|}\le\frac{1}{e^R-1}$$

$$|I_1|\le\frac{e^{aR}}{e^R-1}\cdot 2\pi=\frac{1}{e^{R(1-a)}-\frac{1}{e^{aR}}}\cdot 2\pi\xrightarrow[R\to+\infty]{}0$$

$$\Rightarrow\lim_{R\to+\infty}I_1=0$$

$$I_2=\int\limits_{-R}^{R}\frac{e^{a(-t+2\pi i)}}{1+e^{-t+2\pi i}}(-dt)=\int\limits_{-R}^{R}\frac{e^{-at}\cdot e^{2a\pi i}}{1+e^{-t}\underbrace{e^{2\pi i}}_{=1}}(-dt)=-e^{2a\pi i}\cdot\underbrace{\int\limits_{-R}^{R}\frac{e^{-at}}{1+e^{-t}}dt}_{\text{смена: } u=-t}$$

$$=-e^{2a\pi i}\cdot\int\limits_{R}^{-R}\frac{e^{au}}{1+e^{u}}(-du)$$

$$=-e^{2a\pi i}\cdot\int\limits_{-R}^{R}\frac{e^{at}}{1+e^{t}}dt$$

$$I_3=\int\limits_{-2\pi}^{0}\frac{e^{a(-R-ti)}}{1+e^{-R-ti}}(-dt)=e^{-aR}\cdot\int\limits_{-2\pi}^{0}\frac{e^{-ati}}{1+e^{-R}e^{-ti}}(-dt)=\left(\begin{matrix}\text{смена: } u=-t\\ du=-dt\end{matrix}\right)$$

$$=e^{-aR}\int\limits_{2\pi}^{0}\frac{e^{aui}}{1+e^{-R}e^{ui}}du=-e^{-aR}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{ati}}{1+e^{-R}e^{ti}}dt$$

$$|I_3|\underset{\substack{\uparrow\\ \text{ОЦН}}}{\le}e^{-aR}\cdot\int\limits_0^{2\pi}\frac{|e^{ati}|}{|1+e^{-R}e^{ti}|}dt\le e^{-aR}\int\limits_0^{2\pi}\frac{dt}{1-e^{-R}}=2\pi\frac{e^{-aR}}{1-e^{-R}}\xrightarrow[R\to+\infty]{}0$$

$$|1+e^{-R}e^{ti}|\ge 1-e^{-R}$$

$$I_4=\int\limits_{-R}^{R}\frac{e^{at}}{1+e^t}dt$$

$$A = \lim_{R\to+\infty} (I_1+I_2+I_3+I_4)$$

$$A = -e^{2a\pi i} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{at}{1+e^t}\,dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{at}}{1+e^t}\,dt = \left(1-e^{2a\pi i}\right) \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{at}}{1+e^t}\,dt}_{I}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{1-e^{2a\pi i}} \cdot 2\pi i \cdot (-e^{ai\pi})$$

$$I = \frac{-2\pi i\, e^{ai\pi}}{1-e^{2a\pi i}}$$

$$1-e^{2i\alpha} = 1-\cos 2\alpha - i\sin 2\alpha = 2\sin^2\alpha - 2i\sin\alpha\cos\alpha$$
$$= 2\sin\alpha(\sin\alpha - i\cos\alpha)$$
$$= -2i\sin\alpha(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$
$$= -2i\sin\alpha\, e^{i\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{-2\pi i \cdot e^{i\alpha}}{1-e^{2i\alpha}}, \quad \alpha = a\pi$$

$$I = \frac{-2\pi i \cdot}{-2i\sin\alpha} = \frac{\pi}{\sin\alpha} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

Напомена: сменом $t=e^x$ овај интеграл постаје: $dt = e^x dx = t\,dx$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t}\,\frac{dt}{t} = \int_0^{+\infty} \frac{t^a\,dt}{(1+t)\,t} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)\,t^{1-a}}$$

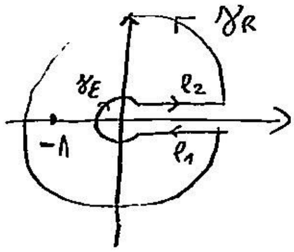
постаје интеграл

ТИПБ

Наставак: ПРИМЕНА КТО на рачунање реалних интеграла

(1) $$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x)^3}\,dx$$ (био за домаћи)

$$f(z) = \frac{1}{(1+z)^3}(\log z)^2$$ интегралимо по контури „C"



$\Gamma = \gamma_R + l_1 + \gamma_\varepsilon + l_2$

$z=-1$ је пол реда 3 у $\mathrm{Int}\,\Gamma$ (за $R>1$)

$(\log z = \log|z| + i\cdot \arg z\ ,\ \arg z \in [0, 2\pi))$

↑ грана коју бирамо

$$I = \int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}(f, -1)$$

$$\mathrm{Res}(f,-1) = \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to -1}\left((z+1)^3 f(z)\right)''$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \lim_{z\to-1}\left((\log z)^2\right)''$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{z\to -1}\left(2\log z\cdot\frac{1}{z}\right)'$$

$$= \lim_{z\to-1}\frac{\frac{1}{z}\cdot z - \log z}{z^2} = \frac{1-\log(-1)}{1} = 1 - i\pi$$

$$\log(-1) = \log 1 + i\cdot\arg(-1) = i\pi$$

$$I = \int_\Gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz + \int_{l_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz + \int_{l_2} f(z)\,dz$$

$$\lim_{z\to\infty} z f(z) = \lim_{z\to\infty}\frac{z(\log z)^2}{(1+z)^3} = \lim_{z\to\infty}\left(\frac{\log z}{z}\right)^2\cdot\left(\frac{z}{1+z}\right)^3 = 0$$

$$\left[\ \frac{\log z}{z} = \frac{\log|z| + i\arg z}{|z|e^{i\arg z}} \xrightarrow[z\to\infty]{} 0\ \checkmark\right.$$

$$\underset{\text{Ж.Л.2}}{\Longrightarrow}\ \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0$$

$$\lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{z(\log z)^2}{(1+z)^3} = 0 \ \underset{\text{Ж.Л.1}}{\Longrightarrow}\ \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = 0$$

$$\left[\ \lim_{z\to 0} z(\log z)^2 = \lim_{z\to 0}|z|e^{i\arg z}(\log|z| + i\arg z)^2\right.$$

$= 0$ јер $|z|\log^2|z| \xrightarrow[z\to 0]{} 0$

$|z|\log|z| \xrightarrow[z\to 0]{} 0\ \checkmark$

$$\ell_1 : z = -t - ih \quad , t \in [-\sqrt{R^2-h^2}, -\sqrt{\varepsilon^2-h^2}]$$
$$\ell_2 : z = t + ih \quad , t \in [\sqrt{\varepsilon^2-h^2}, \sqrt{R^2-h^2}]$$

Ha ℓ_1:
$$f(z) = f(-t-ih) = \frac{1}{(1+(-t-ih))^3} \cdot \log^2(-t-ih)$$
$$= \frac{(\log|-t-ih| + i\cdot\arg(-t-ih))^2}{(1+(-t-ih))^3}$$

$$t<0: \quad \arg(-t-ih) \xrightarrow[h\to 0^+]{} 2\pi$$
$$t>0 \quad \arg(t+ih) \xrightarrow[h\to 0^+]{} 0$$

$$f(-t-ih) \xrightarrow[h\to 0^+]{} \frac{(\log|t| + i\,2\pi)^2}{(1-t)^3}$$

Ha ℓ_2:
$$f(t+ih) \xrightarrow[h\to 0^+]{} \frac{(\log|t|)^2}{(1+t)^3}$$

$$\int_{\ell_1} f(z)\,dz = \int_{-\sqrt{R^2-h^2}}^{-\sqrt{\varepsilon^2-h^2}} f(-t-ih)\,(-dt)$$

$$\xrightarrow[h\to 0^+]{} \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{(\log|t| + i2\pi)^2}{(1-t)^3}(-dt) \overset{\substack{u=-t\\ du=-dt}}{=} \int_R^{\varepsilon} \frac{(\log u + 2\pi i)^2}{(1+u)^3}du$$

$$\int_{\ell_2} f(z)\,dz \xrightarrow[h\to 0^+]{} \int_{\varepsilon}^{R} \frac{(\log|t|)^2}{(1+t)^3}dt$$

$$\int_{\ell_1} f(z)\,dz + \int_{\ell_2} f(z)\,dz \xrightarrow[\substack{h\to 0^+\\ \varepsilon\to 0^+\\ R\to +\infty}]{} \int_0^{+\infty} \frac{(\log t)^2}{(1+t)^3}dt - \int_0^{+\infty} \frac{(\log t + 2\pi i)^2}{(1+t)^3}dt$$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\log^2 t}{(1+t)^3}dt - \int_0^{+\infty} \frac{\log^2 t + 4\pi i \log t - 4\pi^2}{(1+t)^3}dt$$

$$I = -4\pi i \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\log t}{(1+t)^3}dt + 4\pi^2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)^3} = 2\pi i\,(1-2\pi)$$

$$2\pi i + 2\pi^2 = -4\pi i \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\log t}{(1+t)^3}\,dt + 4\pi^2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)^3}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\log t}{(1+t)^3}\,dt = \frac{2\pi}{-4\pi} = \frac{-1}{2}$$

добијамо и

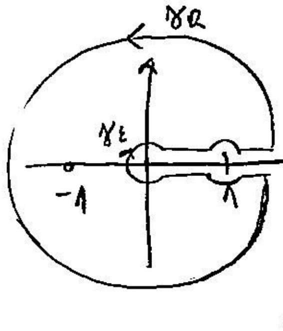
$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)^3} = \frac{2\pi^{\cancel{2}}}{4\pi^{\cancel{2}}} = \frac{1}{2}$$

али тај се једноставно рачуна и без овога

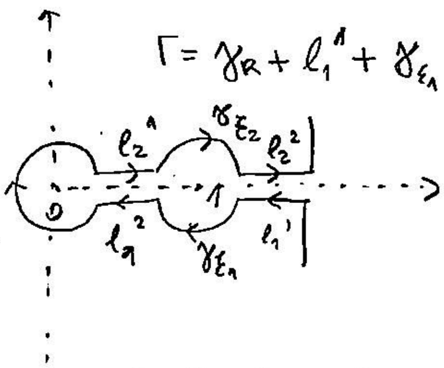
(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log t}{t^2-1}\,dt$ (већ урађен, али хоћемо на други начин)

$f(z) = \dfrac{(\log z)^2}{z^2-1}$ по модификованој „C" контури Γ

(због сингуларитета на $\mathbb{R}^+$)



$$\Gamma = \gamma_R + l_1^1 + \gamma_{\varepsilon_1} + l_1^2 + \gamma_\varepsilon + l_2^1 + \gamma_{\varepsilon_2} + l_2^2$$



одабир гране:
$\left(\ln z = \ln|z| + i\arg z,\ \arg z \in (0, 2\pi)\right)$

$$I = \int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \ \mathrm{Res}(f, -1) = i\pi^3$$

$$\mathrm{Res}(f,-1) = \lim_{z\to -1} \cancel{(z+1)} \cdot \frac{(\log z)^2}{(z-1)\cancel{(z+1)}} = \frac{(\log(-1))^2}{-2} = \frac{-\pi^2}{-2} = \frac{\pi^2}{2}$$

$$\lim_{z\to\infty} z f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z(\log z)^2}{z^2-1} = 0 \ \underset{\text{Ж.Л. 2}}{\Longrightarrow} \ \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0$$

$$\lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z(\log z)^2}{z^2-1} = 0 \ \underset{\text{Ж.Л. 1}}{\Longrightarrow} \ \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = 0$$

$$\lim_{z\to 1} (z-1) f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{(\log z)^2}{z+1} = \begin{cases} 0, & \operatorname{Im} z > 0 \\ -2\pi^2, & \operatorname{Im} z < 0 \end{cases} \ \overset{\text{Ж.Л. 1}}{\Longrightarrow} \ \underbrace{\lim_{\varepsilon_1\to 0^+} \int_{\gamma_{\varepsilon_1}} f(z)\,dz}_{} = 2i\pi^3$$

$$\lim_{\varepsilon_2\to 0} \int_{\gamma_{\varepsilon_2}} f(z)\,dz = 0$$

Кад $R\to+\infty$, $\varepsilon\to 0^+$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0^+$, $h\to 0^+$:

$$I = 2i\pi^3 + \int_0^{+\infty} \frac{(\log t)^2}{t^2-1} - \int_0^{+\infty} \frac{(\log t + 2\pi i)^2}{t^2-1} \overset{2i\pi^3}{=} -4\pi i \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\log t}{t^2-1}\,dt + 4\pi^2\, \text{v.p.} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2-1}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\log t}{t^2-1}\,dt = \frac{-\pi^3}{-4\pi} = \frac{\pi^2}{4}$$