$\lim\limits_{R\to\infty}, \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}$

$$\Downarrow$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{2}\pi i \cdot \frac{\pi}{\cancel{4}\,2} = \int_0^{+\infty} \frac{2\log t + i\pi}{1+t^2}\,dt = 2\cdot\int_0^{+\infty}\frac{\log t\,dt}{1+t^2} + i\pi\cdot\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}$$

Када изједначимо реалне и имагинарне делове обе стране једнак. добијамо:

$$\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\log t}{1+t^2}\,dt = 0}, \quad \pi\cdot\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi^2}{2}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$$ (овај се израчунава и рачуна $\operatorname{arctg} t\big|_0^{+\infty}$)

② Израчунати:

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{\log x}{x^2-1}\,dx$$

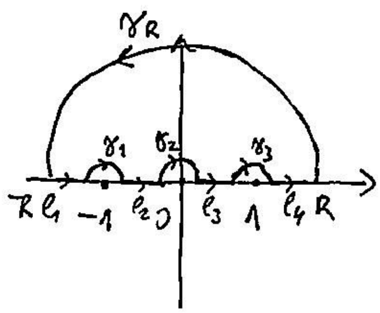
$R(x) = \frac{1}{x^2-1}$ парна рационална фја

и има полове на реалној оси ± 1 (оба су реда 1)

Идеја је да се интеграли:

$f(z) = \frac{g(z)}{z^2-1}$, $g(z) = \log|z| + i\arg z$, $\arg z \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

по контури на слици



$\gamma_R: z = Re^{it}, \ t\in[0,\pi]$

$l_1: z = t, \ t\in[-R, -1-\varepsilon_1]$

$\gamma_1^-: z = \varepsilon_1 e^{it} - 1, \ t\in[0,\pi]$

$(\Gamma = \gamma_R + l_1 + \gamma_1 + l_2 + \gamma_2 + l_3 + \gamma_3 + l_4)$ $\quad l_2: z = t, \ t\in[-1+\varepsilon_1, -\varepsilon_2]$

$\gamma_2^-: z = \varepsilon_2 e^{it}, \ t\in[0,\pi]$

$l_3: z = t, \ t\in[\varepsilon_2, 1-\varepsilon_3]$

$\gamma_3: z = \varepsilon_3 e^{it} + 1, \ t\in[0,\pi]$

$l_4: z = t, \ t\in[1+\varepsilon_3, R]$

f нема полова у горњој полуравни

$$\Rightarrow \int_\Gamma f(z)\,dz = 0$$

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = \underbrace{\int_{\gamma_R} f(z)\,dz}_{I_R} + \int_{l_1} f(z)\,dz + \underbrace{\int_{\gamma_1} f(z)\,dz}_{I_1} + \int_{l_2} f(z)\,dz + \underbrace{\int_{\gamma_2} f(z)\,dz}_{I_2} + \int_{l_3} f(z)\,dz + \underbrace{\int_{\gamma_3} f(z)\,dz}_{I_3} + \int_{l_4} f\,dz$$

$$0 = I_R + I_1 + I_2 + I_3 + \int_{-R}^{-1-\varepsilon_1} \frac{g(t)}{t^2-1}\,dt + \int_{-1+\varepsilon_1}^{-\varepsilon_2} \frac{g(t)}{t^2-1}\,dt + \int_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_3} \frac{g(t)}{t^2-1}\,dt + \int_{1+\varepsilon_3}^{R} \frac{g(t)}{t^2-1}\,dt$$

$$g(t) = \log|t| + i\arg t = \begin{cases} \log|t| + i\cdot\pi, & \text{за } t<0 \\ \log|t|, & \text{за } t>0 \end{cases}$$

$$0 = \underbrace{I_R + I_1 + I_2 + I_3}_{S} + \int_{-R}^{-1-\varepsilon_1} \frac{\log|t| + i\pi}{t^2-1}\,dt + \int_{-1+\varepsilon_1}^{-\varepsilon_2} \frac{\log|t| + i\pi}{t^2-1}\,dt + \int_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_3} \frac{\log t}{t^2-1}\,dt + \int_{1+\varepsilon_3}^{R} \frac{\log t}{t^2-1}\,dt$$

$$0 = S + \underbrace{\int_{R}^{1+\varepsilon_1} \frac{\log|u| + i\pi}{u^2-1}(-du)}_{\text{смена: } u=-t} + \underbrace{\int_{1-\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{\log|u| + i\pi}{u^2-1}(-du)}_{\text{смена: } u=-t} + \int_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_3} \frac{\log t}{t^2-1}\,dt + \int_{1+\varepsilon_3}^{R} \frac{\log t}{t^2-1}\,dt$$

$$0 = S + \int_{1+\varepsilon_1}^{R} \frac{\log t}{t^2-1}\,dt + i\pi \int_{1+\varepsilon_1}^{R} \frac{dt}{t^2-1} + \int_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_1} \frac{\log t}{t^2-1}\,dt + i\pi \int_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_1} \frac{dt}{t^2-1}$$
$$+ \int_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_3} \frac{\log t}{t^2-1}\,dt + \int_{1+\varepsilon_3}^{R} \frac{\log t}{t^2-1}\,dt \qquad (*)$$

$$\lim_{z\to\infty} z f(z) = \lim_{z\to\infty} z\cdot\frac{g(z)}{z^2-1} = \lim_{z\to\infty} \frac{z\,(\log|z| + i\arg z)}{z^2-1} = 0 \qquad \left(\text{јер } \frac{\log|z|}{|z|} \xrightarrow[z\to\infty]{} 0\right)$$

$$\underset{\text{Ж.Л.2}}{\Rightarrow} \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0$$

$$\left(\text{јер } |z|\log|z| \xrightarrow[z\to 0]{} 0\right)$$

$$\lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z\,(\log|z| + i\arg z)}{z^2-1} = 0 \underset{\text{Ж.Л.1}}{\Rightarrow} \lim_{\varepsilon_2\to 0^+} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$$

I_1 и I_3:
$$\lim_{z\to -1} (z+1) f(z) = \lim_{z\to -1} \cancel{(z+1)}\cdot\frac{\log|z| + i\arg z}{\cancel{(z+1)}(z-1)} = \frac{i\cdot\pi}{-2} = \frac{-i\pi}{2}$$

$$\underset{\text{Ж.Л.1}}{\Rightarrow} \lim_{\varepsilon_1\to 0^+} \int_{\gamma_1^-} f(z)\,dz = -i\cdot\pi\cdot\frac{-i\pi}{2} = \frac{-\pi^2}{2}$$

$$\lim_{z\to 1} (z-1) f(z) = \lim_{z\to 1} \cancel{(z-1)}\,\frac{\log|z| + i\arg z}{(z+1)\cancel{(z-1)}} = \frac{\log 1 + i\arg 1}{2} = 0 \underset{\text{Ж.Л.1}}{\Rightarrow} \lim_{\varepsilon_3\to 0^+} \int_{\gamma_3^-} f(z)\,dz = 0$$

$$\int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C$$

$$i\pi\cdot\left(\int_{1+\varepsilon_1}^{R}\frac{dt}{t^2-1} + \int_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_1}\frac{dt}{t^2-1}\right) = i\pi\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{1+\varepsilon_1}^{R} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_1}\right)$$

$$= i\pi\left(\frac{1}{2}\cdot\left(\ln\frac{R-1}{R+1} - \ln\frac{\varepsilon_1}{2+\varepsilon_1} + \ln\frac{|-\varepsilon_1|}{2-\varepsilon_1} - \ln\frac{|\varepsilon_2-1|}{\varepsilon_2+1}\right)\right)$$

$$= \frac{i\pi}{2}\left(\ln\frac{R-1}{R+1} - \cancel{\ln\varepsilon_1} + \ln(2+\varepsilon_1) + \cancel{\ln\varepsilon_1} - \ln(2-\varepsilon_1) - \ln|\varepsilon_2-1| + \ln|\varepsilon_2+1|\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{R\to+\infty\\ \varepsilon_1\to 0^+\\ \varepsilon_2\to 0^+}]{} \frac{i\pi}{2}\left(\ln 1 + \ln 2 - \ln 2 - \ln 1 + \ln 1\right) = 0 \qquad (**)$$

$$\underset{\substack{(*)\\ \lim\\ R\to+\infty\\ \varepsilon_1\to 0^+\\ \varepsilon_2\to 0^+\\ \varepsilon_3\to 0^+}}{\Longrightarrow} \quad 0 = 0 + \frac{-\pi^2}{2} + 0 + 0 + \int_1^{+\infty}\frac{\ln t\,dt}{t^2-1} + \int_0^1\frac{\ln t\,dt}{t^2-1} + 0 + \int_0^1\frac{\ln t\,dt}{t^2-1}$$

$$+ \int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2-1}\,dt = 2\cdot\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2-1}\,dt - \frac{\pi^2}{2} = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2-1}\,dt = \frac{\pi^2}{4}}$$

Напомена: Мора као горе да се рачуна овај лимес (**) јер $\int_0^1 \frac{dt}{t^2-1}$ дивергира и $\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2-1}$ дивергира,

$$\text{а } \int_0^{1-\varepsilon}\frac{dt}{t^2-1} + \int_{1+\varepsilon}^{+\infty}\frac{dt}{t^2-1} \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} 0$$

Напомена: Ово су били примери када је $R(x)$ парна функција.

Ако није парна онда би требало узети фју $f(z) = R(z)(\log z)^2$!

↑по „С" контури

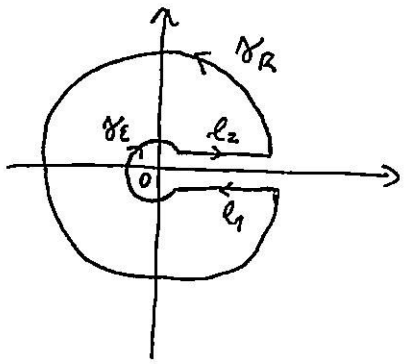
Домаћи: Наћи интеграл $\int_0^{+\infty}\frac{\log x}{(1+x)^3}\,dx$ (решење: $\frac{-1}{2}$)

$\ln = \log$
(користим обе ознаке)

Напомена: конвергенцију свих несвојствених интеграла који се појаве у задацима проверите сами за вежбу.

③ Израчунати: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{3}}(1+x)^2}\,dx$.

$$f(z) = \frac{\log z}{g(z)(1+z)^2}$$



$\log z = \log|z| + i\cdot \arg z$, $\arg z \in (0, 2\pi)$ (овако бирамо грану логаритма)

$g(z) = |z|^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\arg z}{3}}$, $\arg z \in (0, 2\pi)$

(овако бирамо грану трећег корена) (гране су у $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$)

Интегралимо f по „C контури"

$\Gamma = \gamma_R + l_1 + \gamma_\varepsilon^- + l_2$

$l_1: z = -t - ih$, $t \in [-\sqrt{R^2-h^2}, -\sqrt{\varepsilon^2-h^2}]$

$l_2: z = t + ih$, $t \in [\sqrt{\varepsilon^2-h^2}, \sqrt{R^2-h^2}]$

$\gamma_R: z = Re^{it}$, $t \in [\arcsin\frac{h}{R}, 2\pi - \arcsin\frac{h}{R}]$

$\gamma_\varepsilon^-: z = \varepsilon e^{it}$, $t \in [\arcsin\frac{h}{\varepsilon}, 2\pi - \arcsin\frac{h}{\varepsilon}]$

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k)$$

z_k - сингуларитети у $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$

(За довољно велико $R>0$ и довољно мало $\varepsilon>0$, $h>0$ сви су у $\operatorname{Int}\Gamma$)

У нашем случају је сингуларитет -1 и то је пол реда 2 (проверите)

$$\operatorname{Res}(f,-1) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to -1}\left((z+1)^2 f(z)\right)'$$

$$= \lim_{z\to -1}\left(\frac{\log z}{g(z)}\right)'$$

$(\log z)' = \frac{1}{z}$

$(g(z))' = \frac{1}{3g^2(z)}$

* Извод инверзне ф-је: g инверз од h

$\Rightarrow$ $g'(z_0) = \frac{1}{h'(w_0)}$ $w_0 = g(z_0)$

g је инверзна ф-ја од $h(z)=z^3$

$h'(z)=3z^2$

$\Rightarrow g'(z)=\dfrac{1}{3\cdot(g(z))^2}$

$\log(-1)=\log|-1|+i\cdot\arg(-1)$

$=i\cdot\pi$

$g(-1)=|-1|^{\frac{1}{3}}\cdot e^{i\frac{\arg(-1)}{3}}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\mathrm{Res}(f,-1)=\lim_{z\to-1}\frac{\frac{1}{z}g(z)-\log z\cdot\frac{1}{3(g(z))^2}}{(g(z))^2}$$

$$=\frac{(-1)\cdot g(-1)-\log(-1)\cdot\frac{1}{3(g(-1))^2}}{(g(-1))^2}$$

$$=\frac{-e^{i\frac{\pi}{3}}-i\pi\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(e^{i\pi/3})^2}}{e^{2i\frac{\pi}{3}}}=\frac{-e^{i\frac{\pi}{3}}-\frac{i\pi}{3}\cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}}}{e^{2i\frac{\pi}{3}}}$$

$$=-e^{-\frac{i\pi}{3}}-\frac{i\pi}{3}\cdot e^{-i\frac{4\pi}{3}}=-\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)-\frac{i\pi}{3}\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{3}-i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$=-\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{i\pi}{3}\left(-\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i\pi}{6}-i^2\frac{\pi}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{\pi\sqrt{3}}{6}+i\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\frac{\pi\sqrt{3}-3}{6}+i\cdot\frac{3\sqrt{3}+\pi}{6}=A$$

$$\int_\Gamma f(z)dz=2\pi i\cdot A$$

$z=|z|e^{i\arg z}$

образложите за lim!
зашто се добијају 0

$$\lim_{z\to\infty}zf(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{z(\log|z|+i\arg z)}{(1+z)^2\cdot|z|^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\arg z}{3}}}=0\overset{\text{Ж-Л. 2}}{\Longrightarrow}\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}f(z)dz=0$$

$$\lim_{z\to0}zf(z)=\lim_{z\to0}\frac{z(\log|z|+i\arg z)}{(1+z)^2|z|^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\arg z}{3}}}=0\overset{\text{Ж-Л. 1}}{\Longrightarrow}\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\gamma_\varepsilon}f(z)dz=0$$

$t>0$: $\arg(t+ih)\xrightarrow[h\to0^+]{}0$

$t<0$: $\arg(t-ih)\xrightarrow[h\to0^+]{}2\pi$

$$\int_{l_1}f(z)dz+\int_{l_2}f(z)dz\xrightarrow[h\to0^+]{}\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{\log|t|+i\cdot2\pi}{(1-t)^2\cdot\sqrt[3]{|t|}\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}}(-dt)+\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\log|t|}{(1+t)^2\sqrt[3]{|t|}}dt=S$$

Γ добијано ово сменом
$u=-t,\ du=-dt$

$$S=\int_R^{\varepsilon}\frac{\log u+2i\pi}{(1+u)^2\cdot\sqrt[3]{u}\cdot e^{\frac{2i\pi}{3}}}\,du+\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\log t}{(1+t)^2\sqrt[3]{t}}\,dt=-\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\log t+2i\pi}{(1+t)^2\sqrt[3]{t}\,e^{\frac{2i\pi}{3}}}\,dt+\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\log t\,dt}{(1+t)^2\sqrt[3]{t}}$$

$$\int_{\Gamma}f(z)\,dz=\int_{\gamma_R}f(z)\,dz+\int_{\gamma_{\varepsilon}^-}f(z)\,dz+\int_{l_1}f(z)\,dz+\int_{l_2}f(z)\,dz\quad\Big/\lim_{\substack{h\to 0^+\\ R\to\infty\\ \varepsilon\to 0^+}}$$

$$2i\pi\cdot A=0+0+\int_0^{+\infty}\frac{-(\log t+2i\pi)}{(1+t)^2\sqrt[3]{t}\,e^{\frac{2i\pi}{3}}}\,dt+\int_0^{+\infty}\frac{\log t\,dt}{(1+t)^2\sqrt[3]{t}}$$

$$2i\pi A=-\int_0^{+\infty}\frac{\log t}{(1+t)^2\sqrt[3]{t}}e^{-2i\frac{\pi}{3}}\,dt+\int_0^{+\infty}\frac{\log t\,dt}{(1+t)^2\sqrt[3]{t}}-2i\pi e^{-\frac{2i\pi}{3}}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t)^2\sqrt[3]{t}}$$

$$2i\pi A=\underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{\log t}{(1+t)^2\sqrt[3]{t}}\,dt}_{I}\cdot\left(1-e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right)-2i\pi e^{-\frac{2i\pi}{3}}\cdot\underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(1+t)^2\sqrt[3]{t}}}_{I_1}$$

$$2i\pi\cdot\left(\frac{\pi\sqrt{3}-3}{6}+i\cdot\frac{3\sqrt{3}+\pi}{6}\right)=I\left(1-\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)-2i\pi\left(\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}\right)I_1$$

$$i\cdot\frac{\pi(\pi\sqrt{3}-3)}{3}-\frac{\pi}{3}(3\sqrt{3}+\pi)=I\left(1+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)-2i\pi\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)I_1$$

реални делови: $-\frac{\pi}{3}(3\sqrt{3}+\pi)=\frac{3}{2}I-\pi\sqrt{3}\,I_1$

имагинарни : $\frac{\pi(\pi\sqrt{3}-3)}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}I+\pi I_1 \quad \Big]\cdot\sqrt{3}\ +$

$$\frac{\pi}{3}\cdot(\pi\cdot 3-3\sqrt{3})-\frac{\pi}{3}(3\sqrt{3}+\pi)=\frac{3}{2}I+\frac{3}{2}I$$

$$\frac{\pi}{3}(3\pi-3\sqrt{3}-3\sqrt{3}-\pi)=3I$$

$$I=\frac{\pi}{9}(2\pi-6\sqrt{3})=\frac{2\pi(\pi-3\sqrt{3})}{9}$$