$$A_1 = \lim_{z\to 0} z\cdot R(z)\log z = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{\gamma_\varepsilon^-} f(z)dz = 0$$

Жорданова лема 1

$$A_2 = \lim_{z\to\infty} zR(z)\log z = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$$

Жорданова лема 2

$\lim_{z\to 0} \frac{zP(z)}{Q(z)}\log z = 0$

jер je $\lim_{z\to 0} z\log z = 0$

$Q(0)\neq 0$ jер нема полова на $[0,\infty)$

Из (1) узимањем $\lim_{R\to\infty}$, $\varepsilon\to 0$, $h\to 0$

$$\Longrightarrow \quad -2\pi i\cdot\int_0^{+\infty} R(t)dt = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(R(z)\log z, z_k)$$

$$\Longrightarrow \quad \int_0^{+\infty} R(t)dt = -\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(R(z)\log z, z_k)$$

(1) Нека су $p, q\in\mathbb{Z}$, $p\leq q-2$, $p\geq 0$.

Одредити:

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{x^p}{1+x^q}dx = \mathcal{O}(p,q) \quad (\text{Ојлеров интеграл})$$

$$R(x) = \frac{x^p}{1+x^q} \qquad R(z) = \frac{z^p}{1+z^q}$$

$$1+z^q = 0 \text{ за } z^q = -1, \ q\geq 2 \ (q\geq p+2\geq 2)$$

$$z^q = e^{i\pi} \qquad \boxed{z_k{}^q = -1}$$

$$z_k = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{q}}, \ k\in\{0,1,\dots,q-1\}$$

за $x\geq 0$ je $x^q\geq 0$, па je $x^q+1\geq 1>0$, па $1+z^q$ нема нула на $[0,\infty)$

R задовољава све претпоставке из претходне дискусије,

дакле ово je интеграл типа 5, па je

$$\int_0^{+\infty} R(x)dx = -\sum_{k=0}^{q-1}\mathrm{Res}(R(z)\log z, z_k)$$

$$\mathrm{Res}\left(\frac{z^p}{1+z^q}\cdot\log z, z_k\right) \underset{\uparrow}{=} \frac{z_k{}^p\cdot\log z_k}{q\cdot z_k{}^{q-1}} = \frac{z_k{}^p\cdot\log z_k}{-q\cdot z_k{}^{-1}} = \frac{z_k{}^{p+1}\cdot\log z_k}{-q}$$

ПОДСЕТНИК (*)

$$\mathrm{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)} \quad z_0 \text{ пол реда } 1$$

$$f(z_0)\neq 0, \ g(z_0)=0, \ g'(z_0)\neq 0$$

$$f(z_0)\neq 0,\ g(z_0)=0,\ g'(z_0)\neq 0 \Rightarrow z_0 \text{ је пол реда 1 фје } \frac{f}{g}$$

доказ тврђења ⊛

⊛
$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)\cdot\frac{f(z)}{g(z)}$$

$$= \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$$

$$-\sum_{k=0}^{q-1} \frac{z_k^{p+1}\log z_k}{-q} = \int_0^{+\infty} R(x)\,dx = I$$

$$I = \frac{1}{q}\cdot\sum_{k=0}^{q-1} z_k^{p+1}\cdot \log z_k \qquad z_k = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{q}}$$

$$z_k^{p+1} = e^{i\frac{\pi}{q}\cdot(2k+1)\cdot(p+1)} = a^{2k+1}$$

где је $\boxed{a = e^{i\frac{\pi(p+1)}{q}}}$

$$I = \frac{1}{q}\cdot\sum_{k=0}^{q-1} a^{2k+1}\cdot i\cdot\frac{\pi}{q}(2k+1) \quad \text{, јер} \quad \log z_k = \log e^{i\frac{\pi+2k\pi}{q}}$$

$$= i\cdot\frac{\pi(1+2k)}{q}$$

$$I = \frac{i\pi}{q^2}\cdot\sum_{k=0}^{q-1}(2k+1)a^{2k+1}$$

$$\int\left(\sum_{k=0}^{q-1}(2k+1)a^{2k}\right)da = \sum_{k=0}^{q-1}\int(2k+1)a^{2k}\,da$$

$$= \sum_{k=0}^{q-1} a^{2k+1} = a\cdot\sum_{k=0}^{q-1}(a^2)^k$$

$$= a\cdot\frac{(a^2)^q-1}{a^2-1} = \frac{a}{a^2-1}(a^{2q}-1)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{q-1}(2k+1)a^{2k} = \left(\frac{a}{a^2-1}(a^{2q}-1)\right)'$$

$$= \frac{(a^{2q}-1+a\cdot 2q a^{2q-1})(a^2-1) - a\cdot(a^{2q}-1)\cdot 2a}{(a^2-1)^2}$$

$$a^{2q} = e^{i\pi(p+1)\cdot 2} = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{q-1}(2k+1)a^{2k} = \frac{2q(a^2-1)-0}{(a^2-1)^2} = \frac{2q}{a^2-1}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{i\pi}{q^2}\cdot a \cdot \sum_{k=0}^{q-1}(2k+1)\,a^{2k} = \frac{i\pi}{q^2}\cdot a\cdot\frac{2q}{a^2-1}$$

$$I = \frac{2i\pi}{q}\cdot\frac{a}{a^2-1}$$

$$a = e^{i\frac{\pi(p+1)}{q}} \qquad a^2 = e^{i\frac{2\pi(p+1)}{q}} \qquad \alpha = \pi\cdot\frac{p+1}{q}$$

$$a^2 = e^{2i\alpha} = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$$

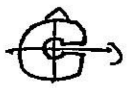
$$\begin{aligned}
a^2 - 1 &= \cos 2\alpha - 1 + i\sin 2\alpha \\
&= -2\sin^2\alpha + 2i\sin\alpha\cos\alpha \\
&= 2\sin\alpha\,(-\sin\alpha + i\cos\alpha) \\
&= 2\sin\alpha\, i\,(\cos\alpha + i\sin\alpha) \\
&= 2i\sin\alpha\cdot e^{i\alpha}
\end{aligned}$$

$$\frac{a}{a^2-1} = \frac{e^{i\alpha}}{2i\sin\alpha\, e^{i\alpha}} = \frac{1}{2i\sin\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{2i\pi}{q}\cdot\frac{1}{2i\sin\frac{\pi(p+1)}{q}} = \frac{\pi}{q\cdot\sin\frac{\pi(p+1)}{q}}$$

Специјално, нпр. за $p=5,\ q=7$ je $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^5}{1+x^7}\,dx = \frac{\pi}{7\sin\frac{6\pi}{7}}$

<u>ТИП 6</u> : $I = \int_0^{+\infty} R(x)x^{-\alpha}dx \quad , 0<\alpha<1$

- $R = \frac{P_n}{Q_m}$ рационална фја без полова на $[0,\infty)$
- интеграл конвергира акко $n \le m-1$
- интеграли се фја $R(z)\cdot\frac{1}{g(z)}$ где је $g(z)$ грана вишезначне фје z^{α}, по контури C 

Детаље ћемо видети на примеру.

(2) Израчунати: $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}(1+x)}$.

$R(x) = \frac{1}{1+x} \quad , \alpha = \frac{1}{3}$ пол фје $R(z) = \frac{1}{1+z}$ је $z=-1$

R нема полова на $[0,\infty)$

па можемо интегралити

по C контури

<u>Напомена</u>: $z \longmapsto \sqrt[n]{z}$ је вишезначна функција

g њена грана у $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$

$$g(z) = \sqrt[n]{|z|}\cdot e^{i\frac{\arg z}{n}} \quad , \arg z \in (0,2\pi)$$

$$g'(z) = \frac{1}{n(g(z))^{n-1}}$$

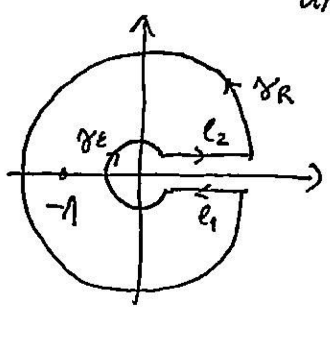
$g(z)$ грана вишезначне фје $z^{\frac{1}{3}}$

$$g(z) = \sqrt[3]{|z|}\cdot e^{i\frac{\arg z}{3}} \quad , g'(z) = \frac{1}{3(g(z))^2}$$

$\boxed{\Gamma = \gamma_R + l_1 + \gamma_\varepsilon + l_2}$

интегралимо функцију

$$f(z) = R(z)\cdot\frac{1}{g(z)} \quad \text{по „}C\text{ контури"}$$



-1 сингуларитет фје R се налази унутар контуре за $R>1$, $\varepsilon<\frac{1}{2}$ (нпр.)