Издвајање грана функција $\log z$ и z^{α}

деф: $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ област

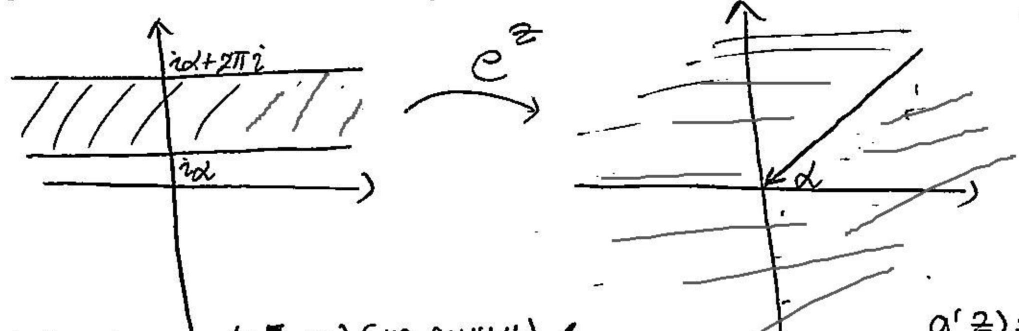
Ако је $f:\Omega\to\mathbb{C}$ непрекидна функција таква да је $e^{f(z)}=z$, $\forall z\in\Omega$ кажемо да је f грана логаритма на Ω (грана вишезначне функције) и обично се означава са $\ln$ или $\log$.

Јасно је да свака фја $f(z)=\log|z|+i(\arg z+2k\pi)$, $k\in\mathbb{Z}$ задовољава једнакост $e^{f(z)}=z$!

($\arg z\in(0,2\pi)$ или $\arg z\in(-\pi,\pi)$, мада би могао да буде било који интервал дужине 2π, некад ћемо користити и $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$)

Издвојити грану значи изабрати $k\in\mathbb{Z}$ и изабрати интервал у коме ће бити arg!

Означаваћемо изабрану холоморфну грану са $\log$ или $\ln$, а увек ћемо напласити интервал у коме се налази arg!



експоненцијална фја је 1-1 на D!

α нпр. тј. $\alpha\in[0,2\pi)$ (на слици)

$D=\{z\in\mathbb{C}: \alpha<\operatorname{Im} z<2\pi+\alpha\}$ област

$e^{z}=e^{x+iy}=e^{x}\cdot e^{iy}$, $e^{x}\in(0,\infty)$,

$g(z)=e^{z}$

$g(D)=\{w\in\mathbb{C}: w\neq 0, \arg w\neq\alpha\}$
$=\Omega$

$\Omega=\mathbb{C}\setminus$ „полуправа"

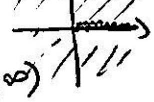
бираћемо грану зависно од домена на коме деф. log!

инверзна функција: (нпр.)

$\log w=\log|w|+i\arg w$

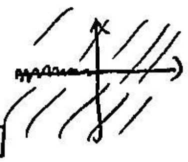
$\arg w\in(\alpha,\alpha+2\pi)$ $(k=0)$

за $\alpha=0$: $\arg w\in(0,2\pi)\to$ домен



$\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$

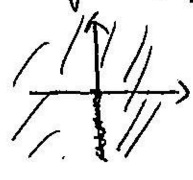
за $\alpha=-\pi$: $\arg w\in(-\pi,\pi)\to$ домен



$\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$

за $\alpha=-\frac{\pi}{2}$: $\arg w\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$

домен



Мотивација за деф. z^α долази из реалне анализе

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$

сада деф. $z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$ где је $\ln z$ нека грана логаритма

нпр. $\ln z = \ln|z| + i\arg z$, $\arg z \in (\alpha, \alpha+2\pi)$

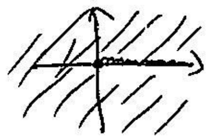
$$z^\alpha = e^{\alpha \ln|z| + \alpha i \arg z} = e^{\ln|z|\cdot\alpha}\cdot e^{\alpha i \arg z} = |z|^\alpha \cdot e^{i\alpha \arg z}$$

$z \in \Omega$ (Ω одређен тд. је log деф на Ω)

Јасно је да када изаберемо грану log, изабрали смо и грану фје z^α.

нпр. $\alpha = \frac{1}{3}$: $z^{\frac{1}{3}} = |z|^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\arg z}{3}}$, $\arg z \in (0, 2\pi)$

је деф на $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$



* Највећи скуп на коме можемо дефинисати грану log је $\mathbb{C}$ без неке полуправе која полази из 0.

(не сме да садржи 0 и мора бити просто повезан)
(о томе више на предавањима) (детаљи - предавања)

* Овако издвојене гране су аналитичке функције и важи:

$$(\log z)' = \frac{1}{z}$$

$$(z^\alpha)' = e^{\alpha \ln z}\cdot \alpha \cdot (\ln z)' = z^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{z} = \alpha \cdot z^{\alpha-1}$$

<u>ТИП 5</u>: $\int_0^{+\infty} R(x)\,dx$

$R=\dfrac{P_n}{Q_m}$ рационална функција, $n\le m-2$
$(\deg P_n=n,\ \deg Q_m=m)$
R нема полове на $\mathbb{R}^+$

$\Big\}$ претпоставке

- Ако је R парна функција, овај тип се своди на ТИП 1.
- Иначе, идеја је да се примени теорема о резидуумима (остацима) на помоћну функцију $f(z)=R(z)\cdot\log z$

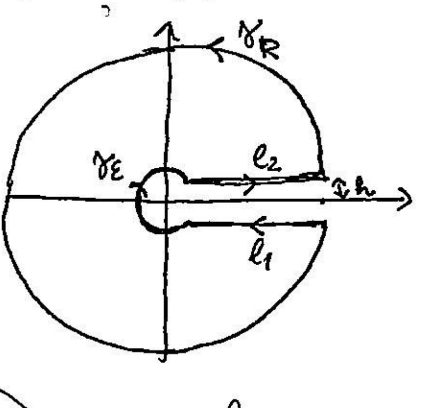
<u>Напомена</u>: ф-ја $\log z$ је дефинисана и холоморфна на $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$.
(Може се дефинисати да буде холоморфна и на $\mathbb{C}$ без било које полуправе која излази из 0.)

$$\log z=\log|z|+i\cdot\arg z\ ,\ \arg z\in(0,2\pi)$$

$$e^{\log z}=e^{\log|z|+i\arg z}=e^{\log|z|}\cdot e^{i\arg z}=|z|e^{i\arg z}=z$$

$$(\log z)'=\frac{1}{z}$$

Сингуларитети ф-је f су полови и припадају скупу нула полинома Q.
Контура по којој интегралимо не сме да сече $[0,\infty)$ због log!



„C контура"

$\gamma_{R,\varepsilon,h}=\gamma_R+l_1+\gamma_\varepsilon+l_2$

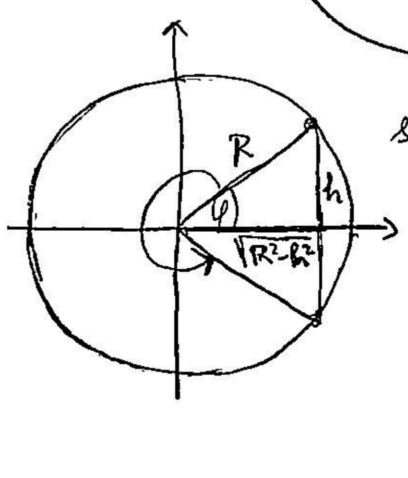
$\gamma_R:\ z=Re^{it},\ t\in\left[\arcsin\frac{h}{R},\ 2\pi-\arcsin\frac{h}{R}\right]$

$l_1:\ z=-t-ih,\ t\in\left[-\sqrt{R^2-h^2},\ -\sqrt{\varepsilon^2-h^2}\right]$

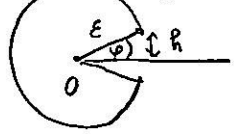
$l_2:\ z=t+ih,\ t\in\left[\sqrt{\varepsilon^2-h^2},\ \sqrt{R^2-h^2}\right]$

$\gamma_\varepsilon:\ z=\varepsilon e^{it},\ t\in\left[\arcsin\frac{h}{\varepsilon},\ 2\pi-\arcsin\frac{h}{\varepsilon}\right]$

<u>ПАЗИТИ</u>: γ_ε негативно оријентисана



$\sin\varphi=\dfrac{h}{R}$



$\sin\varphi=\dfrac{h}{\varepsilon}$

За довољно мало $\varepsilon>0$ и довољно велико $R>0$ сви полови ће бити унутар „С контуре" $\gamma_{R,\varepsilon,h}$.

$$\int_{\gamma_{R,\varepsilon,h}} f(z)\,dz = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(R(z)\log z,\, z_k\right)$$

(Кошијева т.о остацима)

z_k пол ф-је $R(z)$

тј. нула полинома $Q(z)$

$$\int_{\gamma_{R,\varepsilon,h}} f(z)\,dz = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz + \int_{l_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_{\varepsilon}} f(z)\,dz + \int_{l_2} f(z)\,dz \qquad (1)$$

За $\varepsilon, R>0$ фиксиране, $z=x+ih$, $x\in[\varepsilon,R]$

$$\lim_{\substack{h\to 0^+\\ \operatorname{Im} z>0}} R(z)\log z = R(x)\log x$$

$$\lim_{\substack{h\to 0^+\\ \operatorname{Im} z<0}} R(z)\log z = R(x)(\log x + 2\pi i)$$

конвергенција је равномерна по $x\in[\varepsilon,r]$

$$\int_{l_1} f(z)\,dz + \int_{l_2} f(z)\,dz = \int_{-\sqrt{R^2-h^2}}^{-\sqrt{\varepsilon^2-h^2}} R(-t-ih)\log(-t-ih)\,(-dt) + \int_{\sqrt{\varepsilon^2-h^2}}^{\sqrt{R^2-h^2}} R(t+ih)\log(t+ih)\,dt$$

смена: $u=-t$, $du=-dt$

$$= \int_{\sqrt{R^2-h^2}}^{\sqrt{\varepsilon^2-h^2}} R(u-ih)\log(u-ih)\,du + \int_{\sqrt{\varepsilon^2-h^2}}^{\sqrt{R^2-h^2}} R(t+ih)\log(t+ih)\,dt$$

$$= \int_{\sqrt{\varepsilon^2-h^2}}^{\sqrt{R^2-h^2}} -R(t-ih)\log(t-ih)\,dt + \int_{\sqrt{\varepsilon^2-h^2}}^{\sqrt{R^2-h^2}} R(t+ih)\log(t+ih)\,dt$$

$$\xrightarrow[h\to 0^+]{} \int_{\varepsilon}^{R} -R(t)\cdot\left(\cancel{\log t} + 2\pi i - \cancel{\log t}\right)$$

$$\parallel$$

$$-2\pi i\int_{\varepsilon}^{R} R(t)\,dt$$