Додатак:

① Одредити билинеарно пресликавање f које слика тачке $0, \infty$ и 1 редом у $-1, 1$ и $\frac{3-4i}{5}$. Добијеним пресликавањем f пресликати област $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1,\ |z-1+\frac{i}{2}| < 1\}$.

$$f: \begin{array}{l} 0 \mapsto -1 \\ \infty \mapsto 1 \\ 1 \mapsto \frac{3-4i}{5} \end{array}$$

мењано са 1

$$\frac{w-1}{w-\frac{3-4i}{5}} : \frac{-1-1}{-1-\frac{3-4i}{5}} = \frac{z-\infty}{z-1} : \frac{0-\infty}{0-1}, \quad w = f(z)$$

$$\frac{f(z)-1}{f(z)-\frac{3-4i}{5}} : \frac{-2}{\frac{-8+4i}{5}} = \frac{1}{z-1} : \frac{1}{-1}$$

$$\frac{f(z)-1}{f(z)-\frac{3-4i}{5}} \cdot \frac{\frac{-8+4i}{5}}{-2} = \frac{-1}{z-1}$$

$$\frac{f(z)-1}{f(z)-\frac{3-4i}{5}} = \frac{-1}{z-1} \cdot \frac{-2\cdot 5}{-8+4i} = \frac{10}{(z-1)\cdot 4(-2+i)}$$

$$(f(z)-1)\cdot(4(-2+i)(z-1)) = 10\cdot\left(f(z) - \frac{3-4i}{5}\right)$$

$$f(z)\,(4(-2+i)(z-1) - 10) = 4(i-2)(z-1) + 2\cdot(3+4i)$$

$$f(z)\,(4z\cdot(i-2) - 4(-2+i) - 10) = 4z(i-2) - 4(i-2) - 6 + 8i$$

$$f(z)\cdot(4z(i-2) - 2 - 4i) = 4z(i-2) + 4i + 2$$

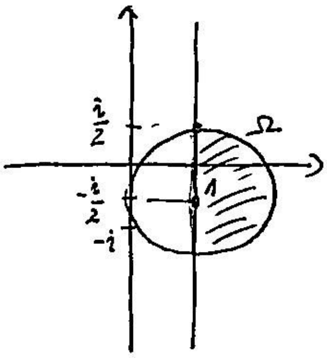
$$f(z) = \frac{4z(i-2) + 2(1+2i)}{4z(i-2) - 2(1+2i)}$$

$$\frac{1+2i}{i-2}\cdot\frac{-2-i}{-2-i} = \frac{-5i}{5} = -i$$

$$f(z) = \frac{4z + 2\cdot(-i)}{4z - 2\cdot(-i)} = \frac{2z-i}{2z+i} = \frac{z-\frac{i}{2}}{z+\frac{i}{2}} = 1 - \frac{i}{z+\frac{i}{2}}$$

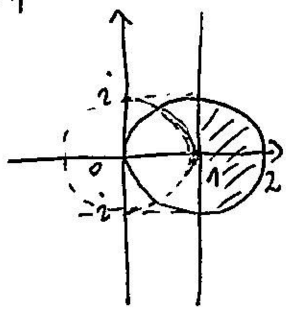
$$f(z) = 1 - i\cdot\left(\frac{1}{z+\frac{i}{2}}\right)$$

$\Omega = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1 ,\ |z - 1 + \frac{i}{2}| < 1 \}$



$|z - (1 - \frac{i}{2})| < 1$

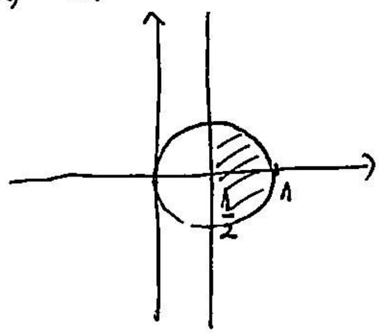
$w_1(z) = z + \frac{i}{2}$



$|w_1 - 1| < 1$

$\operatorname{Re} w_1 > 1$

$w_2(w_1) = \frac{1}{w_1}$



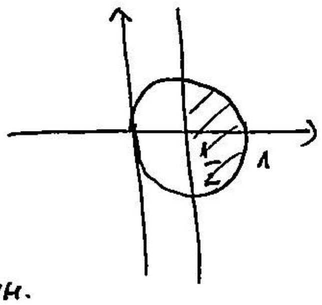
$|w_1 - 1| = 1 \longmapsto \operatorname{Re} w_2 = \frac{1}{2}$

$\operatorname{Re} w_1 = 1 \longmapsto |w_2 - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$

* $1 \mapsto 1$, па се унутрашњост круга $|w_1 - 1| < 1$ слика на десну полураван, $\operatorname{Re} w_2 > \frac{1}{2}$
* $2 \mapsto \frac{1}{2}$, па се $\operatorname{Re} w_1 > 1$ слика у унутрашњост круга $|w_2 - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$

$w_3(w_2) = \bar{w}_2$

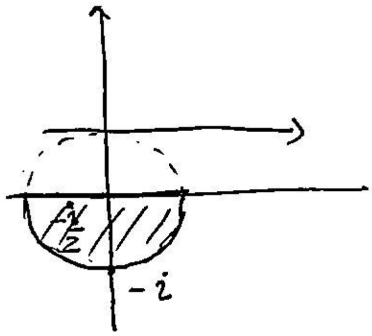
не мења ништа јер је слика сим. у односу на x осу



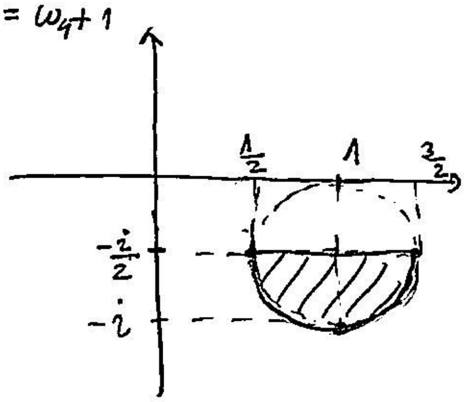
$w_4(w_3) = -i \cdot w_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} \cdot w_3$

ротација за $\frac{3\pi}{2}$

(или за $\frac{-\pi}{2}$)



$w_5(w_4) = w_4 + 1$



слика је:

$|w_5 - 1 + \frac{i}{2}| < \frac{1}{2}$

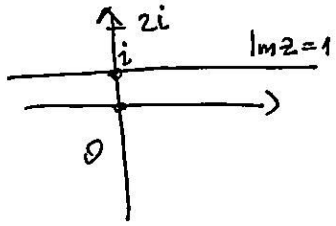
$\operatorname{Im} w_5 < \frac{-1}{2}$

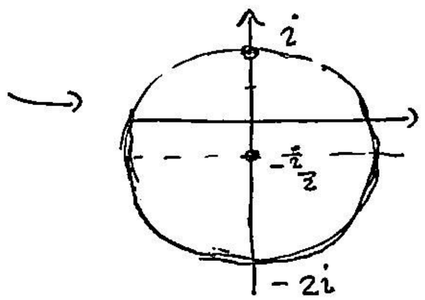
② Одредити билинеарно пресликавање f које слика тачке i и 0 редом у i и $-\frac{i}{2}$, а праву $\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 1\}$ слика на кружницу $\{w\in\mathbb{C} : |w+\frac{i}{2}| = \frac{3}{2}\}$. Добијеним пресликавањем f пресликати област $\Omega = \{z\in\mathbb{C} : |z-i|<1, |z|<1\}$.

$i \longmapsto i$

$0 \longmapsto -\frac{i}{2}$

$\operatorname{Im} z = 1 \longmapsto |w+\frac{i}{2}| = \frac{3}{2}$





* симетрична тачка са 0 у односу на праву $\operatorname{Im} z = 1$ је тачка $2i$

* симетрична тачка са $-\frac{i}{2}$ у односу на кружницу $|z+\frac{i}{2}| = \frac{3}{2}$ је ∞
(јер је $-\frac{i}{2}$ центар те кружнице)

$$\Rightarrow \quad 2i \overset{}{\underset{f}{\longmapsto}} \infty$$

$$\frac{f(z)-i}{f(z)+\frac{i}{2}} : \frac{\infty - i}{\infty + \frac{i}{2}} = \frac{z-i}{z-0} : \frac{2i-i}{2i-0}$$

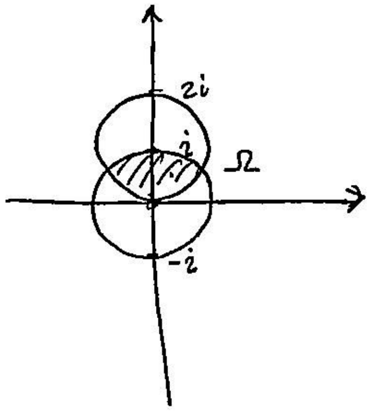
$$\frac{f(z)-i}{f(z)+\frac{i}{2}} = \frac{z-i}{z} : \frac{i}{2i} = \frac{z-i}{z}\cdot 2$$

$$(f(z)-i)\,z = (f(z)+\tfrac{i}{2})\cdot 2(z-i)$$

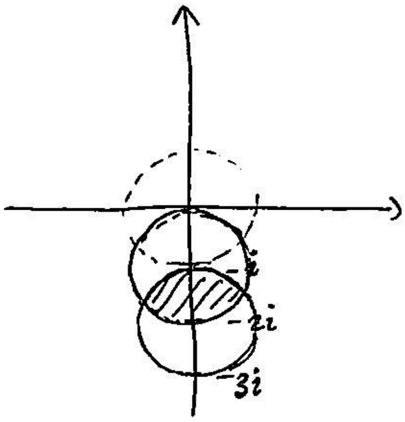
$$f(z)\big(z - 2(z-i)\big) = iz + i(z-i) = 2iz+1$$

$$f(z) = \frac{2iz+1}{2i-z} = \frac{-2i(z-2i)+3}{z-2i} = -2i + \frac{3}{z-2i}$$

$$f(z) = -2i + 3\cdot\overline{\left(\frac{1}{\overline{z-2i}}\right)}$$



$w_1(z) = z - 2i$



$w_2(w_1) = \dfrac{1}{\overline{w_1}}$

$-2i \longmapsto \dfrac{1}{2i} = \dfrac{-i}{2}$

$-3i \longmapsto \dfrac{1}{3i} = \dfrac{-i}{3}$

$-i \longmapsto -i$

* $|w_1 + i| = 1 \longmapsto \operatorname{Im} w_2 = -\dfrac{1}{2}$

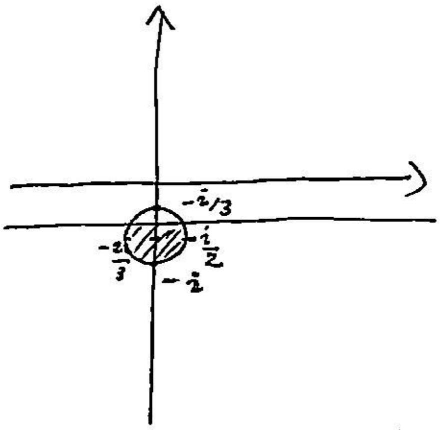
$-i \longmapsto -i$, па се $|w_1 + i| < 1$

слика на $\operatorname{Im} w_2 < -\dfrac{1}{2}$

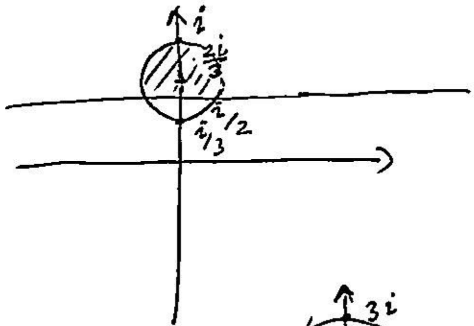
* $|w_1 + 2i| = 1 \longmapsto \left|w_2 + \dfrac{2i}{3}\right| = \dfrac{1}{3}$

$-2i \longmapsto -\dfrac{i}{2}$, па се $|w_1 + 2i| < 1$

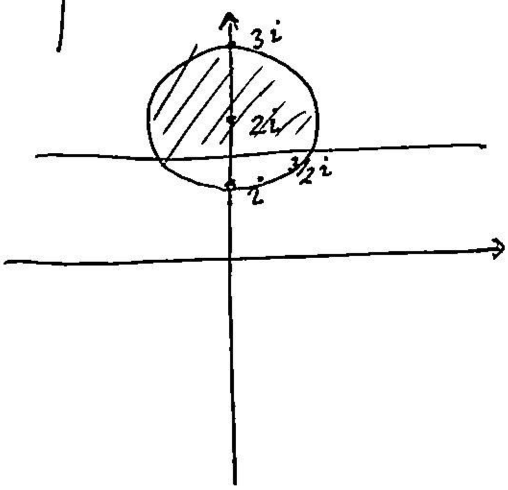
слика на $\left|w_2 + \dfrac{2i}{3}\right| < \dfrac{1}{3}$



$w_3(w_2) = \overline{w_2}$



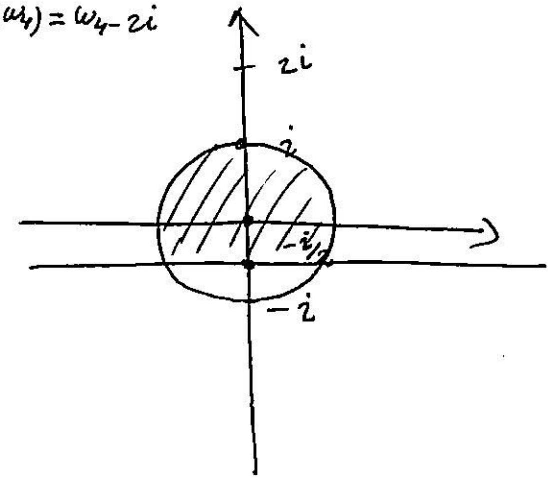
$w_4(w_3) = 3 \cdot w_3$



$w_5(w_4) = w_4 - 2i$

$i \longmapsto i$

$0 \longmapsto -\dfrac{i}{2}$



слика је $\left\{ w_5 \in \mathbb{C} : |w_5| < 1,\ \operatorname{Im} w_5 > -\dfrac{1}{2} \right\}$