Комплексни бројеви

На скупу $\mathbb{R}^2$ уводимо операције $+$ и $\cdot$ на следећи начин:

$$\left.\begin{aligned}(x_1,y_1)+(x_2,y_2)&=(x_1+x_2,y_1+y_2)\\(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)&=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+x_2y_1)\end{aligned}\right\}*$$

$(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ је поље

Посматрамо пресликавање $\phi: (x,0)\longmapsto x$

$(0,1)\longmapsto i$

које је хомоморфизам и бијекција. (са i означавамо слику од $(0,1)$)

Дефинишемо $\mathbb{C}=\{x+iy : x,y\in\mathbb{R}\}$

$\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ изоморфизам

$\phi(x,y)=x+iy$

$(\mathbb{C},+,\cdot)$ је поље – називамо га поље комплексних бројева

i зовемо имагинарна јединица

$i=(0,1)$

$i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(0\cdot 0-1\cdot 1,0\cdot 1+1\cdot 0)=(-1,0)$

односно $\boxed{i^2=-1}$

$*$ нам индукује операције на $\mathbb{C}$

$(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$

$(x_1+iy_1)\cdot(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$

Важи:

$$\left.\begin{aligned}i^{4k}&=1\\i^{4k+1}&=i\\i^{4k+2}&=-1\\i^{4k+3}&=-i\end{aligned}\right\}\ k\in\mathbb{N}_0$$

За $z\in\mathbb{C}$ тд. $z=x+iy$ уводимо ознаке

$x=\operatorname{Re} z$ реални део

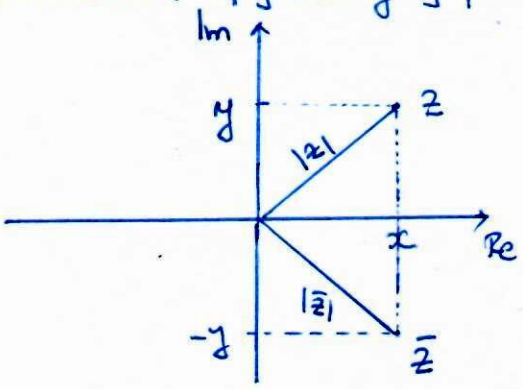
$y=\operatorname{Im} z$ имагинарни део

$\bar{z}=x-iy$ конјугат

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ модул

Геометријски:

- реални бројеви су на правој $\mathbb{R}$
- комплексни бројеви су у равни $\mathbb{R}^2$



$z = x + iy$

$\bar{z} = x - iy$

$|z| = |\bar{z}|$

$\operatorname{Im} \bar{z} = -y$

$\operatorname{Re} \bar{z} = x$

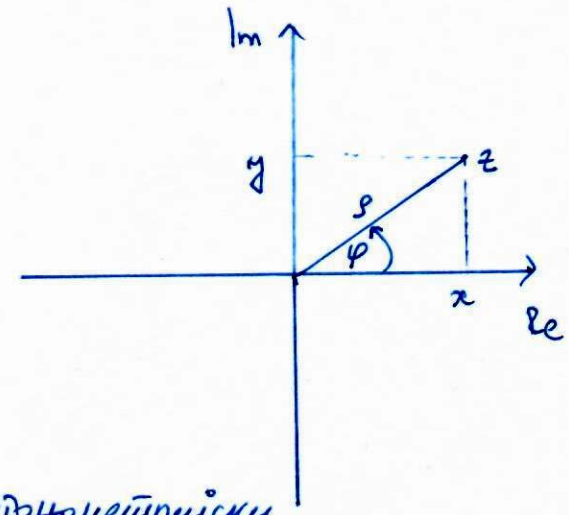
Још нека својства:

1) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ 2) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z$ 3) $z - \bar{z} = 2 \operatorname{Im} z \cdot i$ 4) $\bar{\bar{z}} = z$

5) $|z| = |\bar{z}|$ 6) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ 7) $|z^n| = |z|^n$ 8) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

9) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

* Поларна форма комплексног броја



$z = x + iy$

$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \rho$

$x = \rho \cos\varphi$

$y = \rho \sin\varphi$

$$z = \rho\cos\varphi + i \cdot \rho \sin\varphi$$

$$z = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$ тригонометријски запис

$$\cos\varphi + i\sin\varphi =: e^{i\varphi}$$ (дефинишемо)

$$z = \rho e^{i\varphi}$$

за $z \neq 0$: $\varphi \in [0, 2\pi)$

$\rho \in (0, +\infty)$

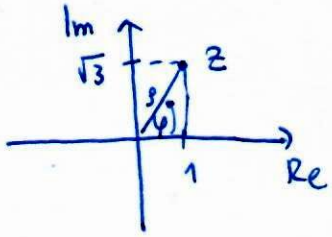
$$z = \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\rho} \left(\overbrace{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}^{\cos\varphi} + i \overbrace{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}^{\sin\varphi} \right)$$

! $\begin{cases} \rho = |z| \\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \end{cases}$ али није увек $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ јер је кодомен за arctg $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

① Представити у поларној форми:

а) $1+i\sqrt{3}$

б) $\alpha\in(-\pi,\pi)$, $1+\cos\alpha+i\sin\alpha$



а) $z=1+i\sqrt{3}$

$z=s\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ (желимо овај облик)

$s=|z|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$

$z=2\cdot\left(\underbrace{\frac{1}{2}}_{\cos\varphi}+i\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\sin\varphi}\right)\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{3}$

(можетс код једноставних случајева лако одредити са слике уз помоћ синуса и косинуса, а можетс и преко arctg ако пазетс на квадрант)

$\left.\begin{array}{l}\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{3}\\ \varphi\in(0,\frac{\pi}{2})\end{array}\right\}\Rightarrow\varphi=\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$ (овде може директно arctg јер је $\varphi\in(0,\frac{\pi}{2})$)

б) $\alpha\in(-\pi,\pi)$

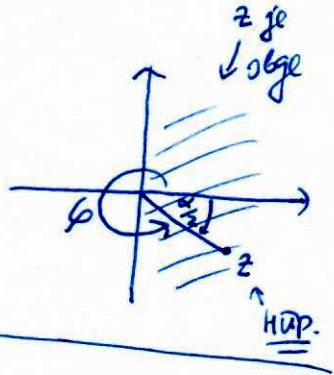
$z=1+\cos\alpha+i\sin\alpha$

$|z|=\sqrt{(1+\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}=\sqrt{1+2\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\sqrt{2+2\cos\alpha}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\cos\alpha}$

$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=2\cdot\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}}=2\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$

$\frac{\alpha}{2}\in(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, па је $\cos\frac{\alpha}{2}>0$, па је $\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=\cos\frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow\ |z|=2\cos\frac{\alpha}{2}$



$z=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\underbrace{\frac{1+\cos\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}}}_{\cos\varphi}+i\underbrace{\frac{\sin\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}}}_{\sin\varphi}\right)$

$\cos\varphi=\frac{1+\cos\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cancel{2}\cos^{\cancel{2}}\frac{\alpha}{2}}{\cancel{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\cos\frac{\alpha}{2}$

$\sin\varphi=\frac{\sin\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cancel{\cos\frac{\alpha}{2}}}{\cancel{2\cos\frac{\alpha}{2}}}=\sin\frac{\alpha}{2}$

$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

$\varphi\in[0,2\pi)$, а $\frac{\alpha}{2}\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

овде треба пазити!

- Ако је $\alpha\in[0,\pi)$ тј. $\frac{\alpha}{2}\in[0,\frac{\pi}{2})$ онда је $\varphi=\frac{\alpha}{2}$.
- Ако је $\alpha\in(-\pi,0)$ тј. $\frac{\alpha}{2}\in(-\frac{\pi}{2},0)$ онда је $\varphi=\frac{\alpha}{2}+2\pi$.

Дефинисали смо $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$

* Мотивација:

$$\cos t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}t^n \quad , \sin t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}t^{2n+1}$$

$$e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$$

$$e^{it}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(it)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}i^n t^n$$

!

Зашто ово важи!?

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}i^{2k}t^{2k}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}i^{2k+1}\cdot t^{2k+1}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}t^{2k}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i\cdot(-1)^k}{(2k+1)!}t^{2k+1}$$

$$=\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}t^{2k}}_{\cos t}+i\cdot\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}t^{2k+1}}_{\sin t}$$

$$\boxed{e^{it}=\cos t+i\sin t}$$

За $z=x+iy$ $\quad e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$

$$(e^{it})^n=(\cos t+i\sin t)^n$$

$$\parallel$$

$$e^{int}=\cos nt+i\sin nt$$

$$\Rightarrow (\cos t+i\sin t)^n=\cos nt+i\sin nt \quad , n\in\mathbb{Z}$$

(Моаврова формула)

Важи: $\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, $\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

За $z\in\mathbb{C}$: дефинишемо $\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$

② Представити $\cos^3 t$ као линеарну комбинацију $1, \cos t, \cos 2t$ и $\cos 3t$.

(1) $(\cos t + i\sin t)^3 = \cos 3t + i\sin 3t$

(2) $(\cos t + i\sin t)^3 = \cos^3 t + 3\cos t\,(i\sin t)^2 + 3\cos^2 t\, i\sin t + i^3 \sin^3 t$

$$= \cos^3 t - 3\cos t \sin^2 t + i\left(3\cos^2 t \sin t - \sin^3 t\right)$$

Изједначавањем десних страна израза (1) и (2) и користити да ако је $z = w \iff \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w,\ \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w$ добијамо:

$$\cos 3t = \cos^3 t - 3\cos t \sin^2 t$$
$$\sin 3t = 3\cos^2 t \sin t - \sin^3 t$$

Из прве једначине добијамо тражено:

$$\cos^3 t = \cos 3t + 3\cos t \sin^2 t$$
$$\cos^3 t = \cos 3t + 3\cos t\,(1 - \cos^2 t)$$
$$\cos^3 t = \cos 3t + 3\cos t - 3\cos^3 t$$
$$4\cos^3 t = \cos 3t + 3\cos t$$
$$\boxed{\cos^3 t = \frac{1}{4}\cos 3t + \frac{3}{4}\cos t}$$