ТРЕЋИ ДВОЧАС

деф1: Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ отворен. функција $\varphi: \Omega \to \mathbb{R}$ је хармонијска у Ω ако има непрекидне парцијалне изводе другог реда ($\varphi \in C^2(\Omega)$) и ако важи $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$ на Ω.

Лапласијан $\Delta \varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy}$

Теорема 1: Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ отворен. Ако је функција $f: \Omega \to \mathbb{C}$ аналитичка у Ω, онда су $u = \operatorname{Re} f$ и $v = \operatorname{Im} f$ хармонијске функције на Ω.

Теорема 2: Ако је f аналитичка у области $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, тада је f' аналитичка у Ω.
(и $f^{(n)}$ је аналитичка у Ω, $\forall n \in \mathbb{N}$)

Везано за теорему 1: обрат? не мора свака хармонијска ф-ја бити реални део неке аналитичке, али ако је област Ω просто повезана, онда мора!

Теорема 3: Нека је $D \subseteq \mathbb{C}$ просто повезана област. Ако је функција $u: D \to \mathbb{R}$ хармонијска у D, тада постоји функција $v: D \to \mathbb{R}$ (такође хармонијска) тд. је $f(z) = u(z) + i v(z)$ аналитичка у D.

ф-је u и v називамо конјуговане у области D.

деф2: За ф-ју $f: D \to \mathbb{C}$ ($D \subseteq \mathbb{C}$ област) кажемо да је хармонијска ако су $u = \operatorname{Re} f$ и $v = \operatorname{Im} f$ хармонијске ф-је.

* Очигледно је сада да је свака аналитичка ф-ја уједно и хармонијска. (Т1+деф2)

① Одредити све вредности параметара $a, b, c \in \mathbb{R}$ за које постоји аналитичка фја $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ тд. је $\operatorname{Re} f(z) = ax^3 + by^3 + x(x+y)^2 + \sin(ax)e^{cy}$.

Одредити и функцију f, ако је $f(0) = i$.

$$u(x,y) = ax^3 + by^3 + x(x+y)^2 + \sin(ax)e^{cy}$$

* Пошто је $\mathbb{C}$ просто повезана област, на основу Т3 неопходно је и довољно да u буде хармонијска на $\mathbb{C}$.

$\Delta u = ?$

$$u_x(x,y) = 3ax^2 + (x+y)^2 + x\cdot 2(x+y) + \cos(ax)\cdot a\, e^{cy}$$

$$u_{xx}(x,y) = 6ax + 2(x+y) + 2(x+y) + 2x + (-\sin ax)\cdot a^2 e^{cy}$$

$$\boxed{u_{xx}(x,y) = 6ax + 6x + 4y - a^2 \sin(ax) e^{cy}}$$

$$u_y(x,y) = 3by^2 + x\cdot 2(x+y) + \sin(ax)\cdot e^{cy}\cdot c$$

$$u_{yy}(x,y) = 6by + 2x + c\cdot \sin(ax)\cdot e^{cy}\cdot c$$

$$\boxed{u_{yy}(x,y) = 6by + 2x + c^2 \sin(ax) e^{cy}}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$6ax + 8x + 6by + 4y + (c^2 - a^2)\sin(ax) e^{cy} = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\boxed{x(6a+8) + y(6b+4) + (c^2 - a^2)\sin(ax) e^{cy} = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2}$$

Дакле, сада треба да важи ова једнакост за сваки пар $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Узмимо парове који нам дају упрошћен рачун и помоћу њих нађимо непознате a, b и c.

1) $(x,y) = (0,1)$ $\quad 6b + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{b = \frac{-2}{3}}$

2) $(x,y) = (\frac{\pi}{a}, 0)$ $\quad \frac{\pi}{a}(6a+8) = 0 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-4}{3}}$

3) $(x,y) = (\frac{\pi}{2a}, 0)$ $\quad (c^2 - a^2)\cdot e^{c\cdot 0} = 0$

$$c^2 = a^2$$

$$c = a \text{ или } c = -a$$

решење:

$$(a,b,c) = \left(\frac{-4}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-4}{3}\right)$$

или

$$(a,b,c) = \left(\frac{-4}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

- Урађено за једно од решења други део задатка, тј. наћи f.
(За друго решење урадите за домаћи)

1) $(a,b,c) = \left(\frac{-4}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{4}{3}\right)$

2) $(a,b,c) = \left(\frac{-4}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-4}{3}\right)$ домаћи

$$u(x,y) = \frac{-4}{3}x^3 - \frac{2}{3}y^3 + x(x+y)^2 + \sin\left(\frac{-4}{3}x\right) \cdot e^{\frac{4}{3}y}$$

$$u_x = -4x^2 + (x+y)^2 + x \cdot 2(x+y) - \frac{4}{3}\cos\left(\frac{-4}{3}x\right)e^{\frac{4}{3}y}$$

$$u_x = -x^2 + y^2 + 4xy - \frac{4}{3}\cos\left(\frac{4}{3}x\right)e^{\frac{4}{3}y} = v_y$$

КР: $u_x = v_y$
$u_y = -v_x$

$$u_y = -2y^2 + x \cdot 2(x+y) - \sin\left(\frac{4}{3}x\right) \cdot e^{\frac{4}{3}y} \cdot \frac{4}{3}$$

$$u_y = -2y^2 + 2x^2 + 2xy - \frac{4}{3}\sin\left(\frac{4}{3}x\right)e^{\frac{4}{3}y} = -v_x$$

$$v(x,y) = \int\left(-x^2 + y^2 + 4xy - \frac{4}{3}\cos\left(\frac{4}{3}x\right)e^{\frac{4}{3}y}\right)dy$$

$$v(x,y) = -x^2y + \frac{y^3}{3} + 2xy^2 - \cos\left(\frac{4}{3}x\right)e^{\frac{4}{3}y} + c(x)$$

$$v_x = -2xy + 2y^2 + \sin\left(\frac{4}{3}x\right) \cdot \frac{4}{3} \cdot e^{\frac{4}{3}y} + c'(x) = 2y^2 - 2x^2 - 2xy + \frac{4}{3}\sin\left(\frac{4}{3}x\right)e^{\frac{4}{3}y}$$

$$\Rightarrow c'(x) = -2x^2 \Rightarrow c(x) = \int -2x^2 dx$$

$$\boxed{c(x) = \frac{-2}{3}x^3 + D}$$

$$v(x,y) = -x^2y + \frac{y^3}{3} + 2xy^2 - \cos\left(\frac{4}{3}x\right)e^{\frac{4}{3}y} - \frac{2}{3}x^3 + D$$

$v(0,0) = 1 \Rightarrow \quad -1 + D = 1$

$$\boxed{D = 2}$$

почетни услов:
$f(0) = u(0,0) + i\,v(0,0) = i$
$\Rightarrow v(0,0) = 1$

$$f(z) = \frac{-4}{3}x^3 - \frac{2}{3}y^3 + x(x+y)^2 + \sin\left(\frac{-4}{3}x\right)e^{\frac{4}{3}y} + i\left(-x^2y + \frac{y^3}{3} + 2xy^2 - \cos\left(\frac{4}{3}x\right)e^{\frac{4}{3}y} - \frac{2}{3}x^3 + 2\right)$$

вредност на реалној оси $\rightarrow z = x + i \cdot 0 = x$

$$f(z) = \frac{-4}{3}x^3 + x^3 - \sin\left(\frac{4}{3}x\right) + i\left(-\cos\left(\frac{4}{3}x\right) - \frac{2}{3}x^3 + 2\right)$$

На основу т. јединости је

$\forall z \in \mathbb{C}$: $$f(z) = \frac{-1}{3} \cdot z^3 - \sin\left(\frac{4}{3}z\right) + i \cdot \left(2 - \frac{2}{3}z^3 - \cos\left(\frac{4}{3}z\right)\right)$$

$$f(z) = \frac{-z^3}{3} + 2i - \frac{2}{3}z^3 \cdot i - i \cdot \left(\cos\left(\frac{4}{3}z\right) - i \cdot \sin\left(\frac{4}{3}z\right)\right)$$

$$\boxed{f(z) = \frac{z^3}{3}(-1-2i) - i \cdot e^{i\left(-\frac{4}{3}z\right)} + 2i}$$

Провера: $f(z)=\frac{z^3}{3}(-1-2i)-i\cdot e^{i(-\frac{4}{3}z)}+2i$, f аналитичка (као композиција аналитичких)

$f(0)=-i\cdot e^0+2i=i$

$z^3=(x+iy)^3=x^3+3x^2iy+3xi^2y^2+i^3y^3=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)$

$$e^{i(-\frac{4}{3}z)}=e^{i(-\frac{4}{3})\cdot(x+iy)}=e^{i(-\frac{4}{3}x)+\frac{4}{3}y}=e^{\frac{4}{3}y}\cdot\left(\cos(-\tfrac{4}{3}x)+i\sin(-\tfrac{4}{3}x)\right)$$
$$=e^{\frac{4}{3}y}\left(\cos(\tfrac{4}{3}x)-i\sin(\tfrac{4}{3}x)\right)$$

$$f=\left(x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)\right)(-1-2i)\frac{1}{3}-i\cdot e^{\frac{4}{3}y}\left(\cos(\tfrac{4}{3}x)-i\sin(\tfrac{4}{3}x)\right)+2i$$

$$\operatorname{Re} f=\frac{-1}{3}(x^3-3xy^2)+\frac{2}{3}(3x^2y-y^3)-e^{\frac{4}{3}y}\cdot\sin(\tfrac{4}{3}x)$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{Re} f&=-\frac{1}{3}x^3+xy^2+2x^2y-\frac{2}{3}y^3-e^{\frac{4}{3}y}\sin(\tfrac{4}{3}x)\\ \operatorname{Im} f&=\frac{-2}{3}(x^3-3xy^2)-(3x^2y-y^3)\frac{1}{3}-e^{\frac{4}{3}y}\cos(\tfrac{4}{3}x)+2\end{aligned}\right\}$$ провери се да је исто као у условима!

* Ако је функција f дата у облику $f(z) = R(x,y)e^{i\varphi(x,y)}$, онда су КР услови дати са :

$$\frac{\partial R}{\partial x} = R \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = -R \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Покажимо да то важи :

$$f(z) = \underbrace{R(x,y)\cos\varphi(x,y)}_{u(x,y)} + i \cdot \underbrace{R(x,y)\sin\varphi(x,y)}_{v(x,y)}$$

КР : $u_x = v_y$ $\quad$ $u = R\cos\varphi$

$u_y = -v_x$ $\quad$ $v = R\sin\varphi$

$u_x = R_x\cos\varphi + R\cdot(-\sin\varphi)\varphi_x$ $\quad$ $v_x = R_x\sin\varphi + R\cdot\cos\varphi\,\varphi_x$

$u_y = R_y\cos\varphi + R(-\sin\varphi)\varphi_y$ $\quad$ $v_y = R_y\sin\varphi + R\cos\varphi\,\varphi_y$

$R_x\cos\varphi - R\sin\varphi\cdot\varphi_x = R_y\sin\varphi + R\cos\varphi\cdot\varphi_y$

$R_y\cos\varphi - R\sin\varphi\cdot\varphi_y = -R_x\sin\varphi - R\cos\varphi\,\varphi_x$

$(R_x - R\varphi_y)\cos\varphi - (R\varphi_x + R_y)\sin\varphi = 0$

$(R_y + R\varphi_x)\cos\varphi + (R_x - R\varphi_y)\sin\varphi = 0$

$R_x - R\varphi_y = A$ $\quad$ $\left.\begin{array}{l} A\cos\varphi - B\sin\varphi = 0 \\ B\cos\varphi + A\sin\varphi = 0 \end{array}\right\}$ $\quad$ $A\cos\varphi = B\sin\varphi$

$R_y + R\varphi_x = B$

$A\cos^2\varphi = B\cos\varphi\sin\varphi = -A\sin\varphi\sin\varphi$

$A(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 0$

$\Rightarrow A = 0$ па је из $B\cos\varphi = B\sin\varphi = 0$

и $B = 0$ $\quad$ $(B^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 0$

$\Rightarrow B = 0)$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} R_x = R\varphi_y \\ R_y = -R\varphi_x \end{array}}$$