① $f = u + iv$ диференцијабилна у $z \in \mathbb{C}$.

Доказати: $|f'(z)|^2 = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = J_f$

КР услови $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$

$$J_f = \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + v_x^2$$

$$f'(z) = f_x = u_x + i v_x \Rightarrow |f'(z)|^2 = u_x^2 + v_x^2$$

Дакле, заиста је $J_f = |f'(z)|^2$.

Ω област

$$H(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{C} \ : \ f \text{ је холоморфна у } \Omega \}$$

деф: За f која је холоморфна на $\mathbb{C}$ кажемо да је **цела** ф-ја.

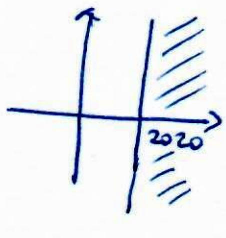
$$f \text{ цела} \iff f \in H(\mathbb{C})$$

$D_f = \{ z \in \mathbb{C} : f \text{ диф. у } z \}$

$H_f = \{ z \in \mathbb{C} : f \text{ холоморфна у } z \}$

Јасно је да важи: $H_f \subset D_f$

② Да ли постоји ф-ја f т.д. $H_f = \{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 2020 \}$?



- $\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 2020 \}$ је затворен скуп
- Докажимо да је H_f отворен скуп.

Ако је $H_f = \emptyset$ отворен је.

Ако је $H_f \neq \emptyset$, онда узмимо произвољно $z \in H_f$ и докажимо да постоји отворена околина од z која је $\subseteq H_f$.

$z \in H_f \Rightarrow f$ је холоморфна у $z \Rightarrow \exists V_z \subseteq \mathbb{C}$, V_z отворен, $z \in V_z$ т.д. је f диф. у V_z

$\Rightarrow f$ је холоморфна у w, $\forall w \in V_z$, па свако $w \in V_z$ припада H_f

$\Rightarrow V_z \subseteq H_f \Rightarrow H_f$ је отворен $\Rightarrow \nexists$ таква f

③ Нека је ф-ја f холоморфна у области Ω и $f(z) \in \mathbb{R}$ $\forall z \in \mathbb{C}$.
Доказати да је $f = \text{const}$.

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

За $h \in \mathbb{R}$ је $f'(z) \in \mathbb{R}$

За $h = ia, a \in \mathbb{R}$ је $\lim\limits_{a\to 0} \frac{f(ia+z)-f(z)}{ia} = -i\cdot A$, $A \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $-iA \in \mathbb{R}$ па је $A = 0$ тј.

$$f'(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$\Rightarrow f = \text{const.}$ (ово може наравно и преко КР услова)

④ Нека је f холоморфна у области Ω и нека је бар једна од ф-ја $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ или $\arg f$ константна. Доказати да је тада $f = \text{const}$.

$f = u + iv$, $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$

1) $u = \text{const.}$ $\quad f' = f_x = u_x + i v_x \underset{\text{КР услови}}{=} u_x - i u_y = 0$

$\Rightarrow f = \text{const.}$

2) аналогно ако је $v = \text{const.}$

3) $\arg f = \text{const.}$ $\quad \underline{\arg f = \varphi}$ $\left(\varphi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$

(за $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ се зад. своди на случај $u = 0$)

$$f = |f| e^{i\varphi} = \overbrace{|f|\cos\varphi}^{u} + i\overbrace{|f|\sin\varphi}^{v}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \text{const.} = c \in \mathbb{R}$$

[коментар: за $c = 0$ је $f = u$ тј. $f(z) \in \mathbb{R}$, па се своди на задатак ③]

$\Rightarrow v = c \cdot u$

К.Р услови: $\left.\begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array}\right\}$ $\quad \begin{array}{l} u_x = c \cdot u_y \\ u_y = -c\, u_x \end{array}$

$\Rightarrow$ $c^2 u_x = -u_x$ $\Rightarrow u_x = 0$, па је и $u_y = 0$

$\Rightarrow u = \text{const.} \Rightarrow f = \text{const.}$

(5) Нека је f холоморфна у области Ω и нека је $|f|$ константна ф-ја у Ω. Доказати да је тада $f = const.$ (Донаћи)

(6) Нека је ф-ја $f = u + iv$ холоморфна у области Ω и нека важи

а) $e^{u}\cos v = const.$ у Ω

б) $u^2 - v = const.$ у Ω

Доказати да је $f = const.$ у Ω.

а) $e^{u}\cos v = const.$ у Ω

$$\boxed{|e^{z}| = e^{\operatorname{Re} z} \ !}$$

← не користи се у задатку (користити се негде касније)

$$e^{u}\cos v + e^{u}\cdot \sin v \cdot i = e^{u+iv} = e^{f}$$

$$\left.\begin{array}{l} e^{u}\cos v = \operatorname{Re} e^{f} \\ e^{f} \text{ холоморфна} \end{array}\right\} \overset{(4)}{\Rightarrow} e^{f} = const. \Rightarrow e^{f}\cdot f' = 0$$

$$\Rightarrow f' = 0$$

$$\Rightarrow f = const.$$

б) $u^2 - v = const.$ у Ω

$u^2 - v = c$

диференцирањем добијамо:

$$2uu_x - v_x = 0$$
$$2uu_y - v_y = 0$$

$$v_x = 2u \cdot u_x$$
$$v_y = 2u \cdot u_y$$

КР услови: $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$

$$\left.\begin{array}{l} u_x = 2u\cdot u_y \\ u_y = -2u\cdot u_x \end{array}\right\} \quad u_x = -4u^2 u_x$$

$$u_x(1 + 4u^2) = 0$$

$$\boxed{u_x = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_y = 0}$$

$$v_x = v_y = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{f = const.}$$

(7) Одредити све целе функције $f = u + iv$ т.д. је $u_y - v_x = -2$ у свакој тачки комплексне равни.

$$f = u + iv$$

$$\left.\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}\right\} \text{КР услови}$$

$$-v_x - v_x = -2$$

$$\boxed{\begin{aligned} v_x &= 1 \\ u_y &= -1 \end{aligned}}$$

$$f' = u_x + iv_x = u_x + i$$

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{Im} f' = 1 \\ &f' \text{ холоморфна} \end{aligned}\right\} \underset{(4)}{\Rightarrow} f' = \text{const.} \Rightarrow u_x = \text{const.} = a$$

$$u_y = -1$$

$$\Rightarrow u = ax - y + b_1$$

$$\left.\begin{aligned} v_y &= a \\ v_x &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow v = ay + x + b_2$$

$$f = ax - y + b_1 + i \cdot (ay + x + b_2)$$

$$f = a \cdot (x + iy) - y + ix + b_1 + ib_2$$

$$f = a(x + iy) + i(x + iy) + b_1 + ib_2$$

$$f(z) = az + iz + b \quad , a \in \mathbb{R} \quad , b \in \mathbb{C}$$

$$\boxed{f(z) = (a + i)z + b}$$

Тврђење (коришћено овде) f холом. на $\Omega \Rightarrow f'$ је холом. на Ω (важи и $f^{(n)}$ хол. на Ω)

(Ω области)

(8) Нека је f холоморфна у $z_0 \in \Omega$. Доказати да је ф-ја $g(z) = \mathrm{Re}\, f(z)$ холоморфна у $z_0 \iff$ ф-ја $f(z)$ је константна у некој околини тачке z_0.

$\Rightarrow$:

f холоморфна у $z_0 \Rightarrow \exists V$ отворен, $V \subseteq \Omega$, $z_0 \in V$ т.д. је f диф у V

g холоморфна у $z_0 \Rightarrow \exists W$ отворен, $W \subseteq \Omega$, $z_0 \in W$ тд је g диф у W

$z_0 \in V \cap W$, $V \cap W$ је отворен (али не мора бити повезан, тј. не мора бити област)

$\Rightarrow \exists D(z_0, r) \subseteq V \cap W$

f и g су холоморфне у $D(z_0,r)$, $D(z_0,r)$ јесте области

$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Im}\, g = 0 \text{ на } D(z_0,r) \\ g \text{ холоморфна на области } D(z_0,r) \end{array}\right\} \overset{(4)}{\Rightarrow} g = \text{const. у } D(z_0,r)$

Дакле $\mathrm{Re}\, f = \text{const.}$ на $D(z_0,r)$, $D(z_0,r)$ области, f холом. на $D(z_0,r)$

$\Rightarrow f = \text{const.}$ на $D(z_0,r)$.

$\Leftarrow$:

f холоморфна у $z_0 \in \Omega$

$f = \text{const.}$ на U, $z_0 \in U$ (U околина од z_0)

$\Rightarrow g = \mathrm{Re}\, f$ је константна на U

$\Rightarrow g$ је диф. на $U \Rightarrow g$ је холоморфна у z_0

(9) Нека су f и g аналитичке у области Ω и $\mathrm{Re}\, f = \mathrm{Re}\, g$ у Ω.

Доказати: $f = g + \text{const.}$ у Ω.

Посматрајмо $h = f - g$, h је аналитичка у Ω и $\mathrm{Re}\, h = 0$ у Ω, Ω области

$\Rightarrow h = \text{const.}$ у Ω.

(10) Одредити све аналитичке ф-је у области $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ за које је $|f(z)| = 1$ $\forall z \in \Omega$ и $f(z_0) = -1$, $z_0 \in \Omega$.

На основу задатка (5) $f = \text{const.}$ на $\Omega \Rightarrow f(z) = -1$ $\forall z \in \Omega$.