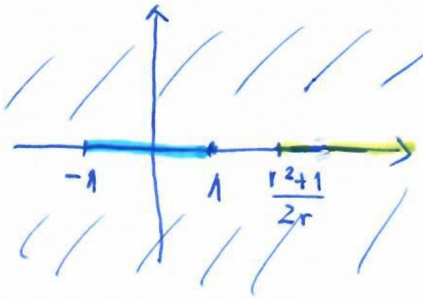
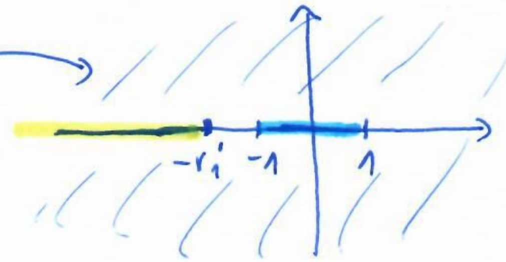
$$r_1' = \frac{r^2+1}{2r}$$

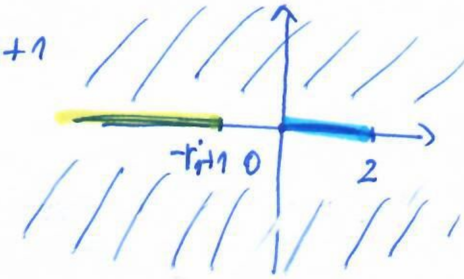
Даље:

$w_1(z) = -z$

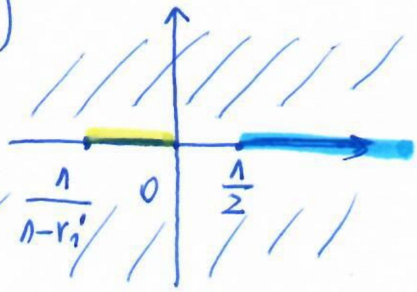




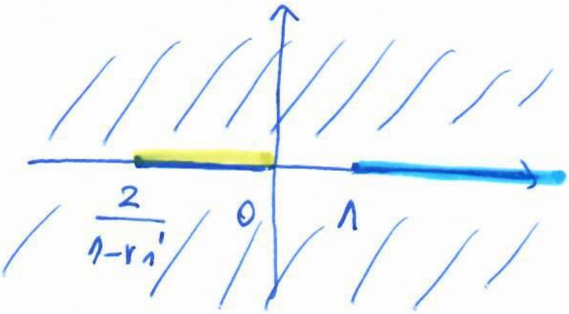
$w_2(w_1) = w_1 + 1$



$w_3(w_2) = \left(\overline{\frac{1}{w_2}}\right)$

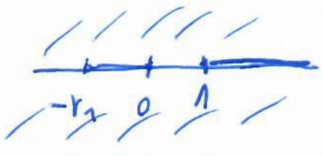


$w_4(w_3) = 2w_3$



$$\frac{2}{1-r_1'} = \frac{2}{1-\frac{r^2+1}{2r}} = \frac{2}{\frac{2r-r^2-1}{2r}} = \frac{4r}{-(1-r)^2} = \frac{-4r}{(1-r)^2} = r_1(-1)$$

Дакле, зацата $w(z) = 2\cdot\frac{1}{1-f(z)}$ слика $B(r)$ на



тј. $\mathbb{C}\setminus([-r_1,0]\cup[1,\infty))$

а) Пошто конформно пресликавање чува модул, то је

$M(B(r)) = M(\mathbb{C}\setminus([-r_1,0]\cup[1,\infty)))$ тј.

$$\mu(r) = 2\mu\left(\sqrt{\frac{r_1}{r_1+1}}\right), \quad \frac{r_1}{r_1+1} = \frac{\frac{4r}{(1-r)^2}}{\frac{4r}{(1-r)^2}+1} = \frac{4r}{4r+1+r^2-2r}$$

$$= \frac{4r}{(1+r)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu(r) = 2\mu\left(\frac{2\sqrt{r}}{1+r}\right)}$$

б) користимо део под а) тј. $\mu(r)=2\mu\left(\frac{2\sqrt{r}}{1+r}\right)$

Ако означимо $r_1=\frac{2\sqrt{r}}{1+r}$, онда је $r_1(1+r)=2\sqrt{r}$

тј. $r_1+r_1r-2\sqrt{r}=0$

$$r_1\cdot(\sqrt{r})^2-2\sqrt{r}+r_1=0$$

$$\sqrt{r}_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4r_1^2}}{2r_1}=\left(1\pm\sqrt{1-r_1^2}\right)\cdot\frac{1}{r_1}$$

$\sqrt{r}<1$ због $r<1$, па је $\sqrt{r}=\frac{1-\sqrt{1-r_1^2}}{r_1}$

$\left(\frac{1+\sqrt{1-r_1^2}}{r_1}>1 \text{ јер } 1+\sqrt{1-r_1^2}>r_1,\ \sqrt{1-r_1^2}>\underbrace{r_1-1}_{<0}\right)$

$$\Rightarrow\quad \mu\left(\left(\frac{1-\sqrt{1-r_1^2}}{r_1}\right)^2\right)=2\mu(r_1)$$

Односно ако поново заменимо $r_1=r$ добијамо

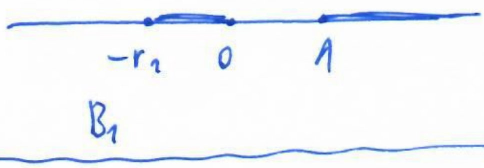
$$\boxed{\mu(r)=\frac{1}{2}\mu\left(\left(\frac{1-\sqrt{1-r^2}}{r}\right)^2\right)}$$

Напомена: Заменом r са $\sqrt{1-r^2}$ добијамо

$$\mu\left(\sqrt{1-r^2}\right)=\frac{1}{2}\mu\left(\frac{(1-r)^2}{(1-r)(1+r)}\right)=\frac{1}{2}\mu\left(\frac{1-r}{1+r}\right)$$

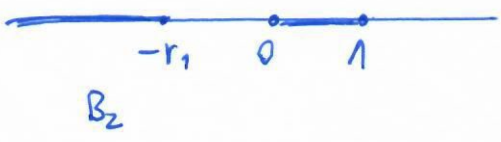
③ Ако је $B_2=\mathbb{C}\setminus\left((-\infty,-r_1]\cup[0,1]\right)$ доказати да је

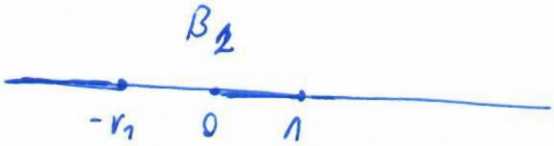
$$M(B_2)=2\mu\left(\sqrt{\frac{1}{1+r_1}}\right).$$

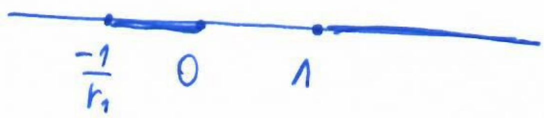


$B_1=\mathbb{C}\setminus\left([-r_1,0]\cup[1,\infty)\right)=B_1(r_1)$

Знамо: $M(B_1)=2\mu\left(\sqrt{\frac{r_1}{1+r_1}}\right)$



ф-ја $f(z)=\frac{1}{z}$ слика 

На 

$\mathbb{C}\setminus\left(\left[-\frac{1}{r_1},0\right]\cup[1,\infty)\right)=B_1\left(\frac{1}{r_1}\right)$

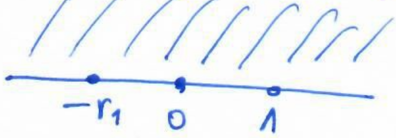
f је конформно, па је $M(B_2)=M(B_1')=2\mu\left(\sqrt{\frac{\frac{1}{r_1}}{1+\frac{1}{r_1}}}\right)$

$$=2\mu\left(\sqrt{\frac{1}{r_1+1}}\right)$$

(4) Ако је $B_1=\mathbb{C}\setminus\left([-r_1,0]\cup[1,\infty)\right)$ и $B_2=\mathbb{C}\setminus\left((-\infty,-r_1]\cup[0,1]\right)$ доказати да је $M(Q_1)=\frac{M(B_1)}{\pi}$ и $M(Q_2)=\frac{M(B_2)}{\pi}$, где су Q_1 и Q_2 квадрилатерали формирани од горње полуравни са истакнутим тачкама $\infty, -r_1, 0$ и 1 односно $-r_1, 0, 1, \infty$.

$Q_1=Q_1(\infty,-r_1,0,1)$

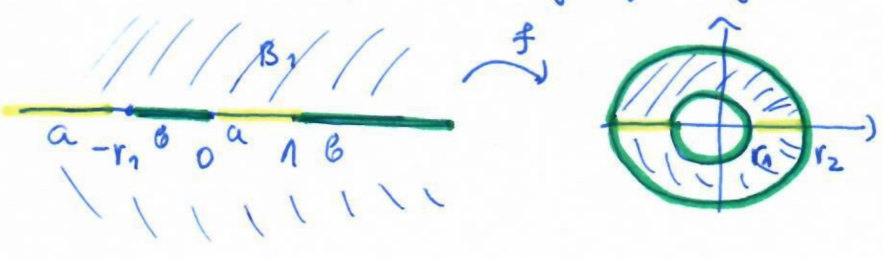
$Q_2=Q_2(-r_1,0,1,\infty)$

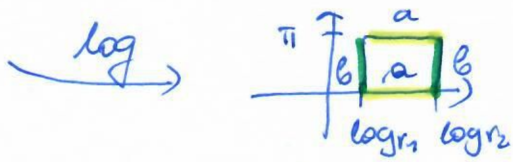


$M(Q_1)=\frac{1}{M(Q_2)}$ очигледно (само су a стране и b стране замениле места!)

Канонско пресликавање B_1 и B_2 бирано тј. слика горњу полураван на горњи полупрстен, а доњу на доњи!

$M(B_1)=\log\frac{r_2}{r_1}$ (B_1 је прстен домен)





рестрикција f на Q слика на горњи полупрстен, а log (тј. грана log на $\mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C}: \operatorname{Im} z\in(-\infty,0]\}$) слика горњи полупрстен на правоугаоник $(\log r_1,\log r_2)\times(0,\pi)$

па је $M(Q_1)=\frac{\log r_2-\log r_1}{\pi}=\frac{M(B_1)}{\pi}$. Слично се добија $M(Q_2)=\frac{M(B_2)}{\pi}$

⑤ Користећи задатак 4 доказати да је $\mu(r)\cdot\mu(\sqrt{1-r^2}) = \frac{\pi^2}{4}$

и $\mu(r)\cdot\mu\left(\frac{1-r}{1+r}\right) = \frac{\pi^2}{2}$.

$$M(Q_1)\cdot M(Q_2) = 1 \Rightarrow M(B_1)\cdot M(B_2) = \pi^2$$

$$2\mu\left(\sqrt{\frac{r_1}{1+r_1}}\right)\cdot 2\mu\left(\sqrt{\frac{1}{1+r_1}}\right) = \pi^2$$

$$\mu\left(\sqrt{\frac{r_1}{1+r_1}}\right)\cdot\mu\left(\sqrt{\frac{1}{1+r_1}}\right) = \frac{\pi^2}{4}$$

за $r = \frac{1}{\sqrt{1+r_1}}$ је $1-r^2 = \frac{r_1}{1+r_1}$, па је

$$\mu(\sqrt{1-r^2})\cdot\mu(r) = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\mu(\sqrt{1-r^2}) = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{1-r}{1+r}\right) \quad \text{(последица задатка 2)}$$

$$\Rightarrow \mu(r)\cdot\mu\left(\frac{1-r}{1+r}\right) = \frac{\pi^2}{2}$$

Специјално, за $r = \sqrt{1-r^2}$ тј. $2r^2 = 1$ односно $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ је

$$\mu\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\mu\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi^2}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{2}}$$