Примена рачуна остатака на израчунавање реалних интеграла

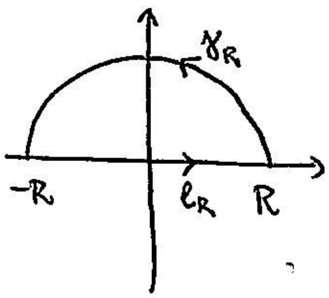
ТИП 1: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx$

$\left.\begin{array}{l} P_n(x) \text{ полином степена } n \\ Q_m(x) \text{ полином степена } m \end{array}\right\}$ полиноми са реалним коефицијентима

$m \geq n+2$

Q_m нема нула на реалној оси

Тада рачунајући интеграл комплексне функције $f(z)=\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ по контури на слици и узимањем лимеса кад $R\to+\infty$ добијамо вредност траженог реалног интеграла.



$l_R:\ z=t,\ t\in[-R,R]$

$\gamma_R:\ z=Re^{i\theta},\ \theta\in[0,\pi]$

$l_R+\gamma_R$ је контура тј. затворена крива по којој рачунамо интеграл

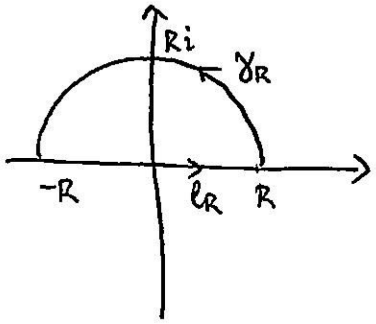
! Циљ је искористити Кошијеву теорему о остацима

(1) Израчунати интеграл $\displaystyle I=\int_0^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2}$

Подинтегрална функција је парна, па је $\displaystyle I=\frac{1}{2}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\,dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2}$

Полином у имениоцу нема нула на реалној оси, и степен му је 6 док је степен полинома у бројиоцу 2, па дакле имамо тип 1.

$$f(z)=\frac{z^2}{(z^2+9)(z^2+4)^2}$$



$\gamma_R: z=Re^{i\theta}, \theta\in[0,\pi]$

$l_R: z=t, \; t\in[-R,R]$

$\gamma=\gamma_R+l_R$ (+ значи надовезивање кривих)

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f,z_k)$$ (КТО) (Кошијева т. о остацима)

$z_1,\dots,z_n$ полови ф-је f унутар $\operatorname{Int}\gamma$

Полови ф-је f у овом случају су: $z_{1,2}=\pm 3i$, $z_{3,4}=\pm 2i$

$z_1=3i$ и $z_3=2i$ су унутар $\operatorname{Int}\gamma$

за $R>3$

$z_1=3i$ је пол реда 1 јер је $\lim_{z\to 3i} f(z)=\infty$

и $$\lim_{z\to 3i} \cancel{(z-3i)}\cdot \frac{z^2}{\cancel{(z-3i)}(z+3i)(z^2+4)^2} = \frac{-9}{6i\cdot 25}\in\mathbb{C}$$

(тј. коначан је)

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(f,3i)=\lim_{z\to 3i}(z-3i)\cdot f(z) = \frac{-9}{6i\cdot 25}=\frac{-3}{50i}=\frac{3}{50}i$$

$z_3=2i$ је пол реда 2 јер је $\lim_{z\to 2i} f(z)=\infty$

и $$\lim_{z\to 2i}\cancel{(z-2i)^2}\cdot\frac{z^2}{(z^2+9)\cancel{(z-2i)^2}(z+2i)^2}=\frac{4i^2}{5\cdot(-16)}\in\mathbb{C}$$

(тј. коначан је) (а $\lim_{z\to 2i}(z-2i)f(z)=\infty$)

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(f,2i)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 2i}\left((z-2i)^2 f(z)\right)'$$

$$=\lim_{z\to 2i}\left(\frac{z^2}{(z^2+9)(z+2i)^2}\right)'=\lim_{z\to 2i}\frac{2z(z^2+9)(z+2i)^{\cancel{2}}-z^2\left(2z(z+2i)^{\cancel{2}}+2(z+2i)(z^2+9)\right)}{(z^2+9)^2(z+2i)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$=\frac{4i\cdot(-4+9)\cdot 4i+4\cdot(4i\cdot 4i+2\cdot 5)}{25\cdot(4i)^3}$$

$$=\frac{-80+4\cdot(-16+10)}{25\cdot(4i)^3}=\frac{-\cancel{104}^{\,13}}{25\cdot\cancel{64}_{\,8}\cdot i^3}=\frac{-13i}{200}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\cdot\left(\frac{3}{50}i-\frac{13}{200}i\right) = 2\pi i\cdot\frac{-1}{200}i = \frac{\pi}{100}$$ (важи за све $R>3$)

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz + \int_{l_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz + \int_{-R}^{R} f(t)\,dt$$

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right| \underset{\text{ОИН}}{\leq} \int_{\gamma_R} |f(z)|\,|dz| = \int_0^\pi |f(Re^{i\theta})|\,|Rie^{i\theta}|\,d\theta$$

$$= R\cdot\int_0^\pi |f(Re^{i\theta})|\,d\theta$$

$$|f(z)| = \left|\frac{z^2}{(z^2+9)(z^2+4)^2}\right| \leq \frac{1}{|z|^2}$$ за $|z|$ довољно велико

јер је $\lim\limits_{|z|\to\infty} \dfrac{|z|^4}{|(z^2+9)(z^2+4)^2|} = 0$

$\Rightarrow$ $R\cdot|f(Re^{i\theta})| \leq \dfrac{1}{R}$ за R довољно велико

$$\Rightarrow \left|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right| \leq \underbrace{\frac{1}{R}\cdot\pi}_{\substack{\to 0\\ R\to\infty}}$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0$$ (на овај начин се доказује у свим случајевима где је $\deg Q > 2+\deg P$)

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(t)\,dt = \frac{\pi}{100}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{\pi}{100}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{100} = \frac{\pi}{200}$$

Напомена. Ако је $m=n+2$ онда се добије $\lim\limits_{|z|\to\infty} |z|^2|f(z)| = C$ и $\underline{|f(z)| \leq \dfrac{C+\varepsilon}{|z|^2}}$ $\varepsilon>0$, $|z|$ дов. велико

Тип 2: $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\,dx$, $R(u,v)$ рационална функција по u и v

уводи се смена $z = e^{ix}, x \in [0, 2\pi]$

$$dz = i \cdot e^{ix} dx$$

$$dx = \frac{dz}{iz}$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$f(z) = \frac{1}{iz} \cdot R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$$

! Рачуна се интеграл функције f на кривој γ која је позитивно оријентисана јединична кружница са центром 0.

$$\gamma : z = e^{ix}, x \in [0, 2\pi]$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\,dx$$

$$\int_\gamma R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{iz} = \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\,dx$$

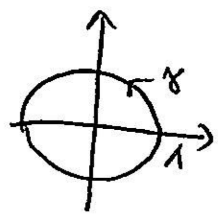
$z = e^{ix}$

$dz = i \cdot e^{ix} dx = iz\,dx$

Са друге стране, $\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k)$

$z_1, \dots, z_n$ · изоловани сингулар. фје f

унутар $\mathrm{Int}\,\gamma$



② Израчунати интеграл $I=\int\limits_0^{2\pi}\frac{dx}{a^2-2a\cos x+1}$, $a\in(0,1)$.

$(a-1)^2>0$ за $a\in(0,1)$

$a^2-2a+1>0$

$a^2+1>2a$

$\frac{a^2+1}{2a}>1\geq\cos x \Rightarrow a^2+1>2a\cos x$

$\boxed{a^2-2a\cos x+1>0}$ $\forall a\in(0,1)$, $\forall x\in[0,2\pi]$

} дискусија

добро је дефинисана подинтегрална ф-ја, непрекидна је и дати реални интеграл постоји

$R(u,v)=\frac{1}{a^2-2au+1}$ $\quad u=\cos x=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$

$$f(z)=\frac{1}{iz}\cdot\frac{1}{a^2-2a\cdot\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+1}=\frac{1}{iz}\cdot\frac{1}{a^2-a\left(z+\frac{1}{z}\right)+1}$$

$$f(z)=\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{a^2z-az^2-a+z}=\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{-az^2+(a^2+1)z-a}$$

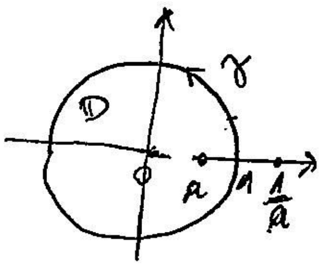
$$I=\int\limits_\gamma f(z)\,dz=\int\limits_\gamma\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{-az^2+(a^2+1)z-a}\,dz$$

$$I=i\cdot\int\limits_\gamma\frac{1}{az^2-(a^2+1)z+a}\,dz$$

сингуларитети ф-је f унутар $\operatorname{Int}\gamma$?

$az^2-(a^2+1)z+a=0$

$$z_{1,2}=\frac{a^2+1\pm\sqrt{(a^2+1)^2-4a^2}}{2a}=\frac{a^2+1\pm\sqrt{(a^2-1)^2}}{2a}=\frac{a^2+1\pm(a^2-1)}{2a}$$



$z_1=\frac{2a^2}{2a}=a$, $z_2=\frac{2}{2a}=\frac{1}{a}$

$z_1=a$ је у $\operatorname{Int}\gamma$, $z_2=\frac{1}{a}$ није у $\operatorname{Int}\gamma$

јер је $0<a<1$

$I = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f, z_1)$ На основу КТО

$\operatorname{Res}(f, a) = ?$ $\qquad f(z) = i \cdot \dfrac{1}{a(z-a)(z-\frac{1}{a})}$

$\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$ $\quad a$ је пол

$$\lim_{z \to a} (z-a) f(z) = \lim_{z \to a} i \cdot \frac{1}{a(z-\frac{1}{a})} = \frac{i}{a(a-\frac{1}{a})} = \frac{i}{a^2-1}$$

$\Rightarrow$ $z_1 = a$ је пол реда 1 ф-је f

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(f, a) = \lim_{z \to a} (z-a) f(z) = \frac{i}{a^2-1}$$

$$\Rightarrow I = 2\pi i \cdot \frac{i}{a^2-1} = \frac{-2\pi}{a^2-1} = \frac{2\pi}{1-a^2}.$$