Примери квазиконформних пресликавања:

① Нека је $f(z) = z\cdot|z|^{2p}$. Одредити $D_f(z)$. За које $p\in\mathbb{R}$ је f квазиконформно на $\mathbb{C}\setminus\{0\}$?

$$D_f(z) = \frac{|f_z|+|f_{\bar z}|}{|f_z|-|f_{\bar z}|}$$

(f дефинисана на $\mathbb{C}\setminus\{0\}$)

(↑ битно за $p<0$, иначе може и на $\mathbb{C}$)

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - i f_y), \quad f_{\bar z} = \frac{1}{2}(f_x + i f_y)$$

$$f(z) = z\cdot|z|^{2p} = (x+iy)(x^2+y^2)^p, \quad z = x+iy$$

$$= x\cdot(x^2+y^2)^p + i\cdot y\,(x^2+y^2)^p$$

$$f_x = (x^2+y^2)^p + iy\cdot p(x^2+y^2)^{p-1}\cdot 2x + x\cdot p(x^2+y^2)^{p-1}\cdot 2x$$

$$f_y = x\,p(x^2+y^2)^{p-1}\cdot 2y + i(x^2+y^2)^p + iy\,p(x^2+y^2)^{p-1}\cdot 2y$$

$$f_x = (x^2+y^2)^{p-1}\left(x^2+y^2+2p\,i\,xy+2p\,x^2\right)$$

$$f_y = (x^2+y^2)^{p-1}\left(2pxy + i(x^2+y^2) + 2i\,p\,y^2\right)$$

$$i f_y = (x^2+y^2)^{p-1}\left(-x^2-y^2+2p\,i\,xy - 2py^2\right)$$

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - i f_y) = \frac{1}{2}\left(2(x^2+y^2)+2p(x^2+y^2)\right)(x^2+y^2)^{p-1} = (x^2+y^2)^p\cdot(p+1)$$

$$f_{\bar z} = \frac{1}{2}(f_x + i f_y) = \frac{1}{2}\left(4p\,i\,xy + 2p(x^2-y^2)\right)(x^2+y^2)^{p-1} = p\cdot(x^2+y^2)^{p-1}(x+iy)^2$$

$$\Rightarrow \quad \mu_f = \frac{f_{\bar z}}{f_z} = \frac{p(x+iy)^2}{(p+1)(x^2+y^2)} \quad \Rightarrow \quad |\mu_f| = \left|\frac{p}{p+1}\right| \qquad p\neq -1$$

За $p=0$ је $f_{\bar z}=0$ па је $f(z)=z$ конформно.

$$|f_z| > |f_{\bar z}| \iff |p+1| > |p|$$

за $p>0$ је $p+1>p$ ✓

за $p<0$: $p\in(-1,0)$: $p+1 > -p$

$2p > -1$

$p > -\frac{1}{2}$

$p \leq -1$: $-p-1 > -p$

$0 > 1$ ⚡

Дакле за $p > -\frac{1}{2}$ ф-ја f чува оријентацију?

$$D_f = \frac{1+|\mu_f|}{1-|\mu_f|} = \frac{|p+1|+|p|}{|p+1|-|p|}$$

$$\begin{cases} \text{за } p \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \text{ је } D_f(z) = \frac{p+1-p}{p+1+p} = \frac{1}{2p+1} > 0 \\ \text{за } p = 0 \text{ је } D_f(z) = 1 \\ \text{за } p > 0 \text{ је } D_f(z) = \frac{p+1+p}{p+1-p} = 2p+1 > 0 \end{cases}$$

$\Big[\ 2p+1 \in (0,1)$, $\frac{1}{2p+1} \in (1, +\infty)\ \Big]$

$K > 1$:

$K = 2p+1$: $p = \frac{K-1}{2}$ пресликавање $f(z) = z \cdot |z|^{K-1}$ је K-квазиконф.

$K = \frac{1}{2p+1}$: $p = \left(\frac{1}{K} - 1\right)\frac{1}{2}$ пресликавање $f(z) = z|z|^{\frac{1}{K}-1}$ је K-квазиконф.

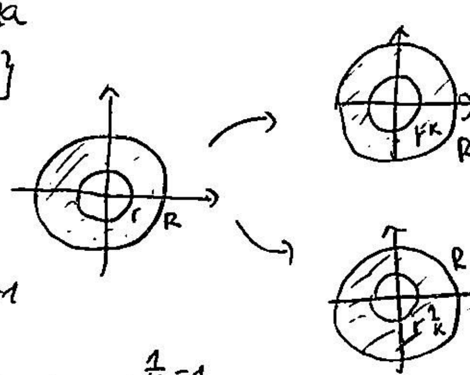
f је конформно за $p = 0$ и $f(z) = z$

Напомена: f слика прстен $P_1 = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ на прстен $P_2 = \{w \in \mathbb{C} : r^{2p+1} < |w| < R^{2p+1}\}$

$z = \rho e^{i\varphi}$

$f(z) = \rho e^{i\varphi} |\rho e^{i\varphi}|^{2p} = \rho^{2p+1} e^{i\varphi}$

свака $|z| = \rho$ се слика на $|w| = \rho^{2p+1}$



Дакле, пресликавања $f(z) = z|z|^{K-1}$ и $f(z) = z|z|^{\frac{1}{K}-1}$ сликају P_1 K-квазиконформно на $P_2 = \{w \in \mathbb{C} : r^K < |w| < R^K\}$ односно на $P_2 = \{w \in \mathbb{C} : r^{\frac{1}{K}} < |w| < R^{\frac{1}{K}}\}$.

② Нека је $f(z) = z + p \cdot \operatorname{Re} z$, $p \in \mathbb{R}$. За које p је f квазиконформно? Наћи D_f и слику правоугаоника $R(0, a, a+ib, ib)$, $a, b \in \mathbb{R}^+$ при пресликавању f.

$f(z) = z + p\operatorname{Re} z = x + iy + px = (1+p)x + iy$, $z = x + iy$

$D_f = \frac{1+|\mu_f|}{1-|\mu_f|}$ $\mu_f = \frac{f_{\bar z}}{f_z}$ квазиконформно: $|f_z| > |f_{\bar z}|$ (чува оријентац

$f_x = 1+p$

$f_y = i$

$i f_y = -1$

$f_z = \frac{1}{2}(f_x - i f_y) = \frac{1}{2}(2+p) = 1 + \frac{p}{2}$

$f_{\bar z} = \frac{1}{2}(f_x + i f_y) = \frac{1}{2}(1+p-1) = \frac{p}{2}$

$$\mu_f = \frac{p}{p+2}, \quad p \neq -2$$

$$|f_z| > |f_{\bar z}| \iff |p+2| > |p|$$

за $p>0$ $\quad p+2>p$

за $p \in (-2,0)$ $\quad p+2>-p$

$$2p>-2$$

$$p>-1$$

за $p<-2$ $\quad -p-2>-p$

$$-2>0 \quad ⨳$$

$\boxed{\text{f чува оријентацију за } p>-1}$

$$D_f = \frac{1+|\mu_f|}{1-|\mu_f|} = \frac{|p+2|+|p|}{|p+2|-|p|}$$

за $p>0$ је $D_f = \frac{p+2+p}{p+2-p} = p+1$

за $p \in (-1,0)$ је $D_f = \frac{p+2-p}{p+2+p} = \frac{1}{p+1}$

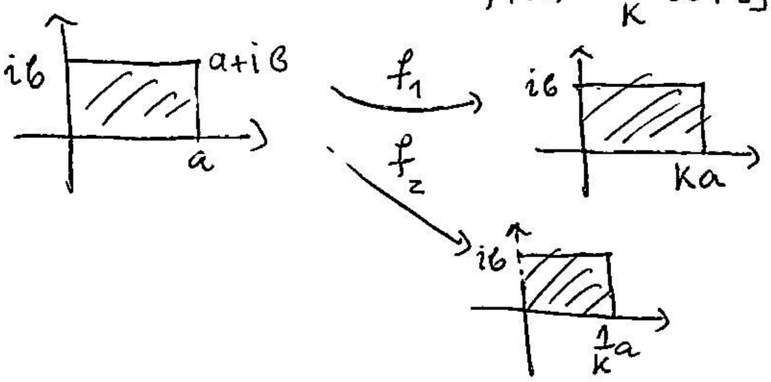
за $p=0$ је $D_f = 1$ (конформно)

за $K = p+1 > 1$: $D_f = K$ $\quad$ f је K-квазиконформно

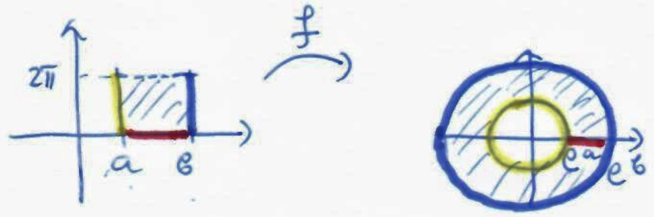
$$f(z) = Kx + iy, \quad z = x+iy$$

за $K = \frac{1}{p+1} > 1$: $D_f = K$ $\quad$ f је K-квазиконформно

$$f(z) = \frac{1}{K}x + iy, \quad z = x+iy$$



Напомена:



$f(z)=e^z$ $\quad z=a+iy,\ y\in[0,2\pi)$

$f(a+iy)=e^a e^{iy}$ кад y прође од 0 до 2π

тад f прође по кружници пол. e^a

$f(b+iy)=e^b e^{iy}$

f је конформно па чува екстремалне дужине фамилија кривих! (доказали смо и то)

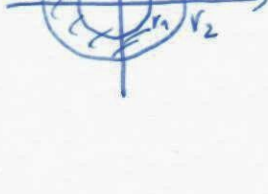
Нека је Γ фамилија кривих које спајају стране правоугаоника које су паралелне y оси (тзв b стране) и нека је $\Gamma'=\{f\circ\gamma : \gamma\in\Gamma\}$. Тада криве из Γ' спајају кружнице $\partial D(0,e^a)$ и $\partial D(0,e^b)$.

$\lambda(\Gamma)=\frac{b-a}{2\pi}$ (по задатку са неког претх. часа)

$$\lambda(\Gamma')=\frac{1}{2\pi}\cdot\ln\frac{e^b}{e^a}=\frac{b-a}{2\pi}$$

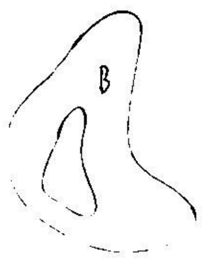
Заиста је $\lambda(\Gamma)=\lambda(\Gamma')$.

* Модул правоугаоника се дефинише као количник страна (геометријски) или као екстремална дужина фамилије Γ.
* Модул прстена се дефинише као $\log\frac{r_2}{r_1}$ или као 2π пута екстремална дужина фамилије кривих које спајају $|z|=r_1$ и $|z|=r_2$.



* Сваки квадрилатерал се може конформно пресликати на неки правоугаоник (задатак). Тај правоугаоник називамо канонски правоугаоник.
Модул квадрилатерала се може дефинисати као количник страница канонског правоугаоника. ($M(Q) = \frac{a}{b}$)

* Сваки двоструко повезан домен (ПРСТЕН ДОМЕН , ТОПОЛОШКИ ПРСТЕН) се може конформно пресликати на неки прстен, називамо га канонски прстен.
Модул прстен домена можемо дефинисати као модул његовог канонског прстена.



B двоструко повезан домен $\Leftrightarrow$ B^c има 2 компоненте повезаности

* У претходној причи је квазиконформно пресликавање било у ствари регуларно квазиконформно (C^1 дифеоморфизам!)

* Геометријска дефиниција квазиконформног пресликавања: (не мора бити регуларно сада)

Хомеоморфизам $\omega: G \to G'$ који чува оријентацију на домену G се назива квазиконформно пр. ако је његова максимална дилатација $K(G) = \sup_{\bar{Q} \subseteq G} \frac{M(\omega(Q))}{M(Q)}$ коначна, где је sup узет по свим квадрилатералима из G. (K квазик. ако је $K(G) \le K$)

* Аналитичка дефиниција еквивалентна са геометријском (када не захтевамо регуларност)

Хомеоморфизам $\omega: G \to G'$ који чува оријентацију на домену G се назива K-квазиконформно пр ако

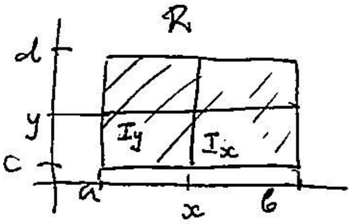
1) ω је апсолутно непрекидна на линијама (ACL)
2) за скоро све $z \in G$ важи $D_f(z) \le K$.

Напомена: Геометријска и аналитичка деф. су еквивалентне. (предавања)

У геометријској деф уместо квадрилатерала се може узети и прстен домен.
(доказује се еквив.)

Подсетимо се: ACL

* f је апсолутно непрекидна на интервалу I ако
за свако $\varepsilon>0$ постоји $\delta>0$ тд. је $\sum|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon$
за сваки коначан низ непресецајућих интервала (a_i,b_i)
тд. $[a_i,b_i]\subseteq I$ и за које важи $\sum(b_i-a_i)<\delta$.
* f је апсолутно непрекидна на линијама (ACL) у G
ако је за сваки правоугаоник $R=\{x+iy : a<x<b,\ c<y<d\}$
$\overline{R}\subseteq G$, f апсолутно непр као ф-ја по x на скоро свим
сегментима $I_y=\{x+iy \mid a<x<b\}$ и као ф-ја по y на скоро свим
сегментима $I_x=\{x+iy \mid c<y<d\}$.



* Сингуларна функција: ф-ја ограничене варијације тд. има извод 0 у скоро свим тачкама интервала I (не може бити AC и неконстантна сингуларна ф-ја !)
(јер за AC ф-ју важи $f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)dx$)

Канторов скуп:

(p_n) низ из $(0,1)$

из средине $[0,1]$ избришемо отворен интервал I_{11} дужине p_1
из средина преостала два интервала бришемо интервале
дужина $\frac{1}{2}\cdot p_2(1-p_1)$ I_{21} и I_{22}

⋮

У n-том кораку из средина 2^{n-1} интервала бришемо отворене интервале дужина $\frac{1}{2^{n-1}}\cdot p_n(1-p_1)(1-p_2)\dots(1-p_{n-1})$ $I_{n1}, I_{n2},\dots I_{nk},\dots I_{n2^{n-1}}$

Канторов скуп $E(p_1,p_2,\dots):= I\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{nk}$

(за $p_n=\frac{1}{3}$ нпр I_{11} дужине $\frac{1}{3}$ .. $I_{n1},\dots I_{n2^{n-1}}$ су дужина
I_{21}, I_{22} дужина $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$)