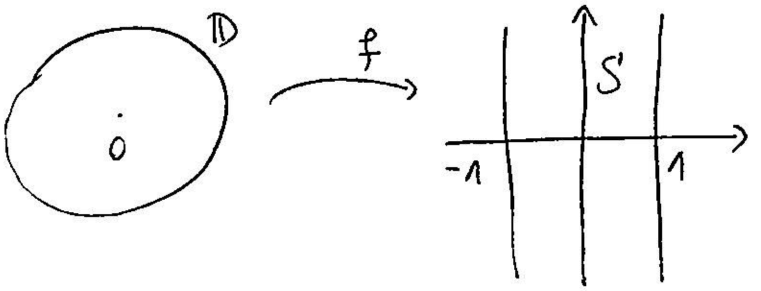
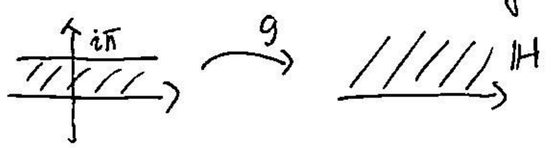
5) Нека је функција f холоморфна у $\mathbb{D}$, при чему је $f(0)=0$ и $|\operatorname{Re} f(z)|<1$ за све $z\in\mathbb{D}$. Доказати да је: $|f'(0)|\le \frac{4}{\pi}$.



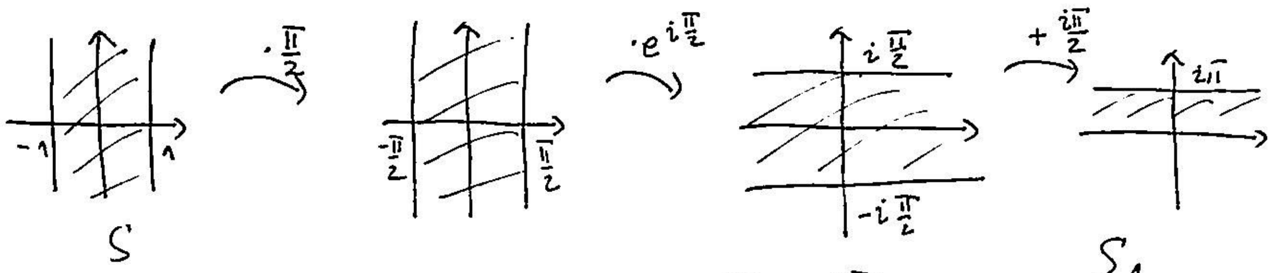
$|\operatorname{Re} f(z)|<1$

$\iff \operatorname{Re} f(z)\in(-1,1)$

Нека је $S=\{w\in\mathbb{C} : -1<\operatorname{Re} w<1\}$, па f слика $\mathbb{D}$ у S.
Познато је да ф-ја $g(z)=e^{z}$ слика траку $S_1=\{z\in\mathbb{C} : 0<\operatorname{Im} z<\pi\}$ на горњу полураван $\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z>0\}$



Сада је јасно да можемо направити пресликавање из $\mathbb{D}$ у $\mathbb{D}$ и искористити Шварцову лему.

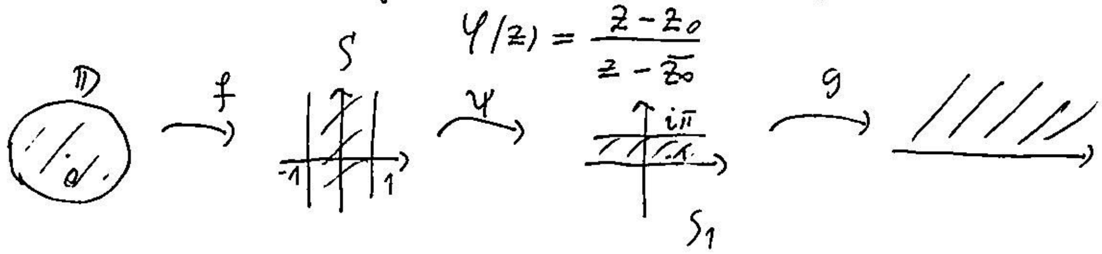


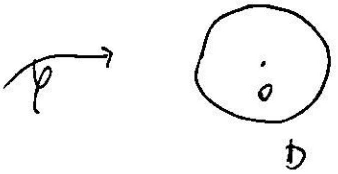
- пресликавање $\psi(z)= z\cdot i\frac{\pi}{2}+i\frac{\pi}{2}$ слика S на S_1

$$\psi(z)=i\frac{\pi}{2}\cdot(z+1)$$

- полураван на диск $\mathbb{D}$ сликамо стандардно

$$\varphi(z)=\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}$$





$F=\varphi\circ g\circ\psi\circ f$ слика $\mathbb{D}$ у $\mathbb{D}$

Хоћемо $F(0)=0$!

$$z_0=g(\psi(f(0)))=e^{i\frac{\pi}{2}(\overset{0}{f(0)}+1)}=e^{i\frac{\pi}{2}}=i$$

Применимо Шварцову лему на $F \Rightarrow |F'(0)|\le 1$

$$F'(z) = \varphi'(g(\psi(f(z)))) \cdot g'(\psi(f(z))) \cdot \psi'(f(z)) \cdot f'(z)$$

$$\varphi'(z) = \frac{z-\bar{z}_0 - z + z_0}{(z-\bar{z}_0)^2} = \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(z-\bar{z}_0)^2}, \quad g'(z) = e^{z}, \quad \psi'(z) = \frac{i\pi}{2}$$

$$F'(0) = \varphi'(g(\psi(0))) \cdot g'(\psi(0)) \cdot \psi'(0) \cdot f'(0) \qquad , \psi(0) = \frac{i\pi}{2}$$

$$z_0 = i$$

$$F'(0) = \varphi'(e^{i\frac{\pi}{2}}) \cdot g'(\tfrac{i\pi}{2})\, \psi'(0)\, f'(0)$$

$$F'(0) = \varphi'(i) \cdot g'(\tfrac{i\pi}{2}) \cdot \frac{i\pi}{2} f'(0)$$

$$\varphi'(i) = \frac{i-\bar{i}}{(i-\bar{i})^2} = \frac{1}{i-\bar{i}} = \frac{1}{2i} = \frac{-i}{2}$$

$$F'(0) = \frac{-i}{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{i\pi}{2} f'(0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{i\pi}{2} f'(0) = \frac{i\pi}{4} f'(0)$$

$$|F'(0)| \le 1 \implies \boxed{|f'(0)| \le \frac{4}{\pi}}$$

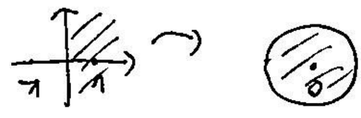
---

* пресликавање $\quad \operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z} = \dfrac{\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}}{\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}} = -i \cdot \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}$

$$\operatorname{tg} z = -i \cdot \frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}$$

$$\varphi(w) = \frac{w-1}{w+1}, \quad -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}, \quad \psi(z) = z\cdot(-i) = z \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

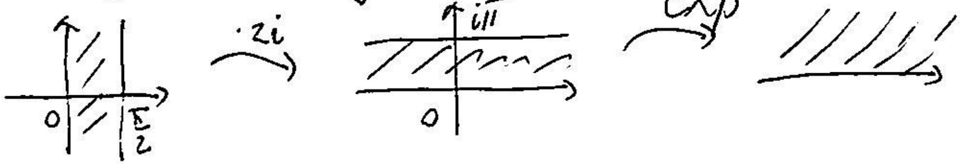
ротација за $-\frac{\pi}{2}$



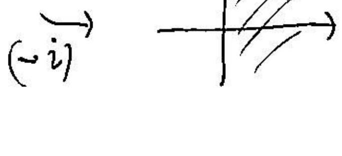
слика десну полураван у $\mathbb{D}$

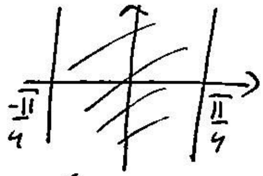
$$g(z) = e^{2iz}$$

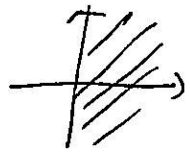
$$\operatorname{tg} z = (\psi \circ \varphi \circ g)(z)$$

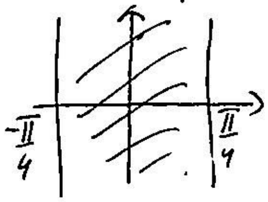


$$e^{2iz} \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{2i(z-\frac{\pi}{4})}$$



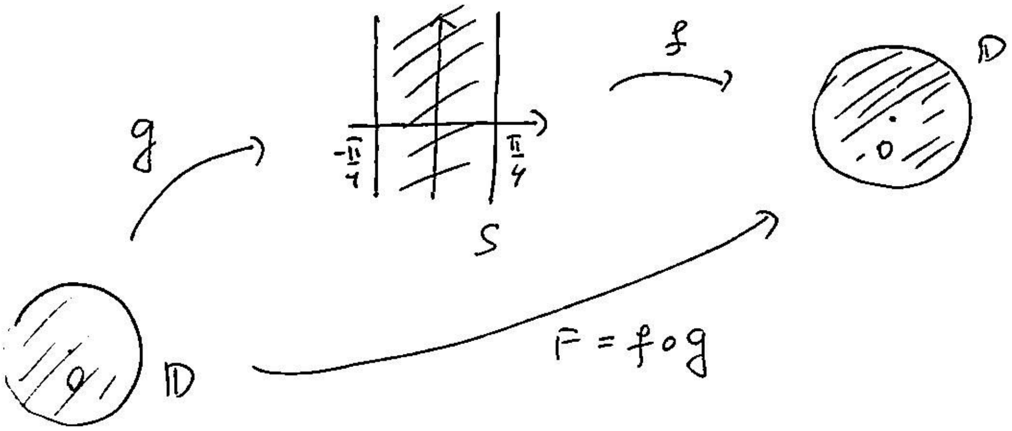
Стога e^{2iz} слика 

на  !

Дакле, $\operatorname{tg} z$ слика 

на  $\mathbb{D}$! $\boxed{\operatorname{tg} 0 = 0}$

(6) Нека је f аналитичка фја у области $S=\{z\in\mathbb{C} : |\operatorname{Re} z|<\frac{\pi}{4}\}$ за коју је $|f(z)|<1$, за све $z\in S$ и $f(0)=0$. Доказати да је $|f(z)|\le|\operatorname{tg} z|$ за све $z\in S$.



Хоћемо $g: \mathbb{D}\to S$ тд. је холоморфно, 1-1 и на стр.

$g(0)=0$.

Тада је $F=f\circ g$ пресликавање из $\mathbb{D}$ у $\mathbb{D}$

$F(0)=f(g(0))=f(0)=0$ и F је холоморфно, па можемо применити Шварцову лему на F.

За g можемо узети инверз од $\operatorname{tg} z$! (А можемо га правити и доступно)

$\operatorname{tg} z = w$

$$-i\cdot\frac{e^{2iz}-1}{e^{2iz}+1}=w$$

$$-i(e^{2iz}-1)=we^{2iz}+w$$

$$e^{2iz}(-i-w)=w-i$$

$$e^{2iz}=\frac{i-w}{i+w}$$

$$2iz=\log\frac{i-w}{i+w}$$ узимамо грану log тд. $\arg\frac{i-w}{i+w}\in(0,2\pi)$

$$z=\frac{1}{2i}\left(\log\left|\frac{i-w}{i+w}\right|+i\arg\frac{i-w}{i+w}\right)$$

$$\boxed{g(z)=-\frac{1}{2}i\left(\log\left|\frac{i-w}{i+w}\right|+i\arg\frac{i-w}{i+w}\right)}$$

$$g^{-1}(z)=\operatorname{tg} z$$

Из Шварцове леме следи: $|F(z)| \le |z|$

$$|\underbrace{f\circ g(z)}_{w}| \le \underset{g^{-1}(w)}{\underset{\|}{|z|}}$$

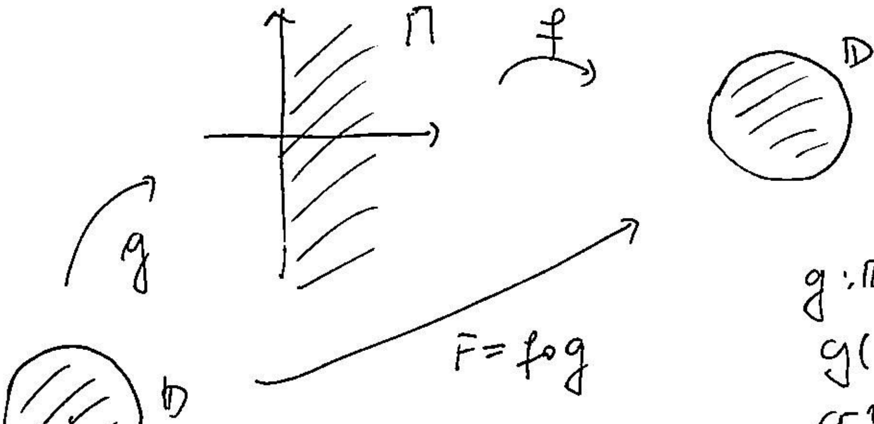
g бијекција

$g(z) \in S$

$$|f(w)| \le |g^{-1}(w)|$$

$$\boxed{|f(w)| \le |\operatorname{tg} w|} \quad \forall w \in S$$

⑦ Нека је $f : \Pi \to \mathbb{D}$ холоморфна функција, где је $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ десна полураван при чему важи $f(\mathbb{N}) = \{0\}$.
Доказати да је функција f идентички једнака 0.



$g : \mathbb{D} \to \Pi$

$g(z) = ?$

$$g^{-1}(w) = \frac{w-1}{w+1} = z$$

$$w - 1 = zw + z$$

$$w(1-z) = 1 + z$$

$$w = \frac{1+z}{1-z}$$

$$\boxed{g(z) = \frac{z+1}{1-z}}$$

(билинеарно)

F слика $\mathbb{D}$ у $\mathbb{D}$!

F је холоморфна

Довољно је доказати да је $F \equiv 0$.

За све $n \in \mathbb{N}$ је $f(n) = 0$, па је $F(g^{-1}(n)) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

тј. $F\left(\frac{n-1}{n+1}\right) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$

F холоморфна на $\mathbb{D}$ $\underset{\text{Тејлоров развој}}{\Rightarrow}$ $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \; z \in \mathbb{D}$

Означимо $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ ($F(a_n)=0 \ \forall n\in\mathbb{N}$)

$a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{3}$, $a_3 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, ...

$F(a_1)=0$ тј. $F(0)=0$

ППС: Пп. да F није идентички једнака 0

- тада нису сви коеф. c_n једнаки 0
- Нека је $m\in\mathbb{N}$ најмањи тд. $c_m \neq 0$

$$F(z) = c_m z^m + c_{m+1} z^{m+1} + \dots$$

F има нулу реда m у 0

$$\varphi_{a_j}(z) = \frac{z-a_j}{1-\overline{a_j} z}$$

$$\varphi_0(z) = z$$

фиксирајмо природан број $n \geq 2$

$a_1, a_2, \dots, a_n$ су нуле ф-је F

$$\Rightarrow \quad F(z) = F_n(z)\cdot \varphi_0(z)^m \cdot \prod_{j=2}^{n} \varphi_{a_j}(z)$$

зад.

$$F(z) = z^m F_n(z) \cdot \prod_{j=2}^{n} \varphi_{a_j}(z)$$

$$\Rightarrow \quad c_m + c_{m+1} z + c_{m+2} z^2 + \dots = F_n(z) \prod_{j=2}^{n} \varphi_{a_j}(z) \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

$$|c_m| = \left|F_n(0) \prod_{j=2}^{n}(-a_j)\right| = \underbrace{|F_n(0)|}_{\substack{\leq 1 \\ \text{(по задатку)}}} \cdot \prod_{j=2}^{n} a_j$$

$$\Rightarrow |c_m| \leq \prod_{j=2}^{n} a_j = \prod_{j=2}^{n} \frac{j-1}{j+1}$$

$$\prod_{j=2}^{n} \frac{j-1}{j+1} = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{2}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{4}}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{5}}{\cancel{7}} \cdot \frac{\cancel{6}}{\cancel{8}} \cdots \frac{\cancel{n-3}}{\cancel{n-1}} \cdot \frac{\cancel{n-2}}{n} \cdot \frac{\cancel{n-1}}{n+1}$$

$$= \frac{2}{n(n+1)}$$

$$|c_m| \leq \frac{2}{n(n+1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\downarrow n\to\infty$$

$$0$$

$$\Rightarrow \boxed{c_m = 0} \quad ↯$$

$$\Rightarrow \boxed{F \equiv 0}$$