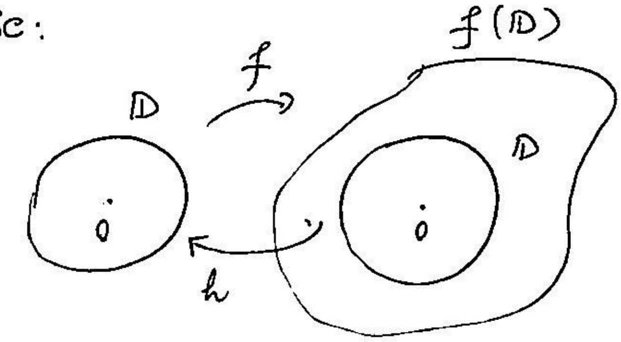
① Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ холоморфна на $\mathbb{D}$ ($\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$) тд задовољава следеће услове:



1) f је 1-1 у $\mathbb{D}$
2) $f(0) = 0$
3) $|f'(0)| \leq 1$
4) $\mathbb{D} \subseteq f(\mathbb{D})$

Доказати да је $f(z) = e^{i\alpha} z$, за неко $\alpha \in \mathbb{R}$ (тј. f је ротација).

Пошто је f 1-1 на $\mathbb{D}$ то је $f : \mathbb{D} \to f(\mathbb{D})$ бијекција, па постоји $f^{-1} : f(\mathbb{D}) \to \mathbb{D}$. Означимо $g = f^{-1}$.

g је такође холоморфна и важи $g'(w) = \frac{1}{f'(z)}$, за $w = f(z)$

$h = g|_{\mathbb{D}}$ h је рестрикција g на $\mathbb{D}$

$$\left.\begin{array}{l} h : \mathbb{D} \to \mathbb{D} \text{ холоморфна} \\ h(0) = g(0) = 0 \end{array}\right\} \underset{\text{Шварц}}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} |h(z)| \leq |z| \\ |h'(0)| \leq 1 \end{array}$$

$$h'(0) = \frac{1}{f'(0)}, \text{ па је } |h'(0)| = \frac{1}{|f'(0)|} \geq 1$$

$\Rightarrow$ мора да важи $|h'(0)| = 1$, па је на основу Шварцове леме h ротација

$$h(z) = e^{i\alpha} z \text{ за све } z \in \mathbb{D}$$

$h = g$ на $\mathbb{D}$ $\Longrightarrow$ $h = g$ на $f(\mathbb{D})$
(теорема јединости)

$h(w) = g(w), \forall w \in f(\mathbb{D})$

$g(w) = e^{i\alpha} w \quad \forall w \in f(\mathbb{D})$

$w = f(z), \; z \in \mathbb{D}$

$f^{-1}(w) = e^{i\alpha} w$

$z = e^{i\alpha} \cdot f(z)$

$\boxed{f(z) = e^{-i\alpha} z} \quad \forall z \in \mathbb{D}$

② Одредити све целе функције f за које је $|f(z)|=1$ кад год је $|z|=1$.

- Докажимо најпре да f има коначан број нула у $\overline{\mathbb{D}}$:

ппс. f има бесконачан број нула у $\overline{\mathbb{D}}$, $\overline{\mathbb{D}}$ компакт

$\Rightarrow$ постоји тачка $a \in \overline{\mathbb{D}}$ и низ a_n нула од f у $\overline{\mathbb{D}}$ тд. $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$

$f(a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$, па је и $f(a)=0$

(холоморфна фја има изоловане нуле)

Сада је на основу теореме јединости $f \equiv 0$

$\Rightarrow$ за све z је $|f(z)|=0$, па не важи услов!

Дакле, f има коначан број нула у $\overline{\mathbb{D}}$.

Нека су $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ све нуле фје f у $\mathbb{D}$.

На основу задатка са прошлог часа је

$$f(z) = g(z)\cdot \prod_{k=1}^{n} \varphi_{a_k}(z) \quad \text{за све } z\in\mathbb{D} \ (\text{и за } z\in\overline{\mathbb{D}})$$

где је $g: \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ холоморфна фја

$|\varphi_{a_k}(z)| = 1$ за $|z|=1$, па је због услова за f и $|g(z)|=1$ за $|z|=1$.

Дакле, g је холоморфна, нема нуле у $\overline{\mathbb{D}}$ и $|g(z)|=1$ за $|z|=1$, па је фја $h(z)=\frac{1}{g(z)}$ холоморфна на околини $\overline{\mathbb{D}}$.

ПММ $\Rightarrow$ $|h(z)| \le 1 \quad \forall z\in\mathbb{D}$

$|g(z)| \ge 1 \quad \forall z\in\mathbb{D}$

па је $|g(z)|=1$ на $\overline{\mathbb{D}}$, g холом.

$\Rightarrow$ $g = \text{const.}$

$\Rightarrow g(z) = e^{i\alpha}, \quad \alpha\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(z) = e^{i\alpha}\cdot \prod_{k=1}^{n} \varphi_{a_k}(z)$

НАПОМЕНА:

$f: \mathbb{D}\to\mathbb{D}$ па можемо применити задатак!

објашњење:

ПММ: $\max_{\partial\mathbb{D}} |f(z)| = 1 = \max_{z\in\overline{\mathbb{D}}} |f(z)|$

$\Rightarrow |f(z)| \le 1 \quad \forall z\in\overline{\mathbb{D}}$

$\Rightarrow |f(z)| < 1, \ \forall z\in\mathbb{D}$

На основу ПММ не може бити $=$ за $z\in\mathbb{D}$

(или на основу Т. о отвореном пр.)

Дакле, $f(z) = e^{i\alpha} \prod_{k=1}^{n} \varphi_{a_k}(z)$ за све $z \in \overline{\mathbb{D}}$.

Тражи се још и да је f цела : $1 - \overline{a_k} z \neq 0$

за све $z \in \mathbb{C}$ и $k \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$

ово је немогуће, осим ако је

$a_k = 0$ за све k!

($\frac{1}{\overline{a_k}}$ су сингуларитети f)

$$\Rightarrow \boxed{f(z) = e^{i\alpha} \cdot z^n}$$

③ Нека је $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфна ф-ја и нека је $f(0) = f'(0) = 0$. Доказати да је $|f''(0)| \leq 2$ и наћи све f тд. је $|f''(0)| = 2$.

Тејлоров развој f на $\mathbb{D}$: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in \mathbb{D}$

$$f(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

$$f'(0) = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

$$\Rightarrow f(z) = z \cdot g(z), \quad g(0) = 0$$

$g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ аналитичка

$$\left(g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(0)}{z}, & z \neq 0 \\ f'(0), & z = 0 \end{cases} \right)$$

Шварцова лема на f $\Rightarrow$ $|f(z)| \leq |z|$

$$|z g(z)| \leq |z|$$

$$|g(z)| \leq 1$$

$$\Rightarrow g(\mathbb{D}) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$$

- Ако је $g = const.$ тј. $g(z) = a \in \mathbb{C}$ онда због $g(0) = 0$ је $a = 0$, па је и $f \equiv 0$. Тада тривијално важи тражено.

• Ако је $g \neq const$, онда је на основу т.о отвореном пресл. g отворено, па је $g(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ ($g(\mathbb{D})$ отворен $\subseteq \overline{\mathbb{D}}$)

$\Rightarrow$ $|g(z)| < 1$, па $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ холоморфно

$g(0) = 0$

$\Rightarrow$ Шварц $|g(z)| \le |z|$, $|g'(0)| \le 1$

$$f'(z) = zg'(z) + g(z)$$

$$f''(z) = zg''(z) + 2g'(z)$$

$$f''(0) = 2g'(0)$$

$$\Rightarrow \quad |f''(0)| = 2|g'(0)| \le 2$$

$=$ се достиже за $g(z) = e^{i\alpha} z$

(g је ротација, Шварц)

$$\Rightarrow \quad |f''(0)| = 2 \text{ за } \boxed{f(z) = e^{i\alpha} z^2} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

(4) Нека је $f : \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}}$ холоморфна и $f(0) = 0$. Доказати да за свако $m \in \mathbb{N}$ $f(z) - 2^m z^m$ има тачно m корена у $D(0, \frac{1}{2})$ (рачунајући мултиплицитет)

· ако је $f = const.$ онда је $f(z) = 0$, па тривијално важи тражено.

· ако је $f \neq const.$ онда је f отворено, па је $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$.

Шварцова лема на f: $|f(z)| \le |z|$ $\forall z \in \mathbb{D}$

$g(z) = f(z) - 2^m z^m$ холоморфна на $D(0, \frac{1}{2})$

$$|f(z)| \le |z| = \frac{1}{2} < |-2^m z^m| = 1 \quad \text{на } \partial D(0, \tfrac{1}{2})$$

$\Rightarrow$ $-2^m z^m$ и g имају једнак Рушеова т. број нула у $D(0, \frac{1}{2})$, а то је m