$$\Rightarrow \quad (h_1,h_2)=\frac{1}{\det df(z)}\begin{bmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h_1'\\ h_2'\end{bmatrix}$$

$$(h_1,h_2)=\frac{1}{J_f}\left(a_{22}h_1'-a_{12}h_2',\ -a_{21}h_1'+a_{11}h_2'\right)$$

Ако $h_1^2+h_2^2=1 \Rightarrow \frac{1}{(J_f)^2}\left[(a_{22}h_1'-a_{12}h_2')^2+(-a_{21}h_1'+a_{11}h_2')^2\right]=1$

овде се добија једначина елипсе!

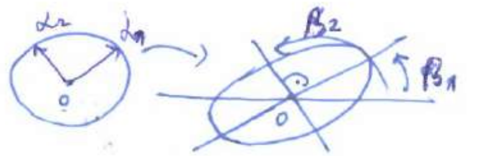
$A h_1'^2+Bh_2'^2=1$ (после ротације се добија овај облик)

Дакле $df(z)$ слика кружнице у елипсе!

($J_f>0$, па и $J_f\neq 0$)

(f C^1 дифеоморфизам који чува оријентацију)

$$df(z)(e^{i\alpha})=(f_z(z)dz+f_{\bar z}(z)d\bar z)(e^{i\alpha})$$
$$=f_z(z)\cdot e^{i\alpha}+f_{\bar z}(z)e^{-i\alpha}$$



max $|df(z)(e^{i\alpha})|$ се достиже за $\alpha_1=\frac{1}{2}\arg\frac{f_{\bar z}}{f_z}$, а min за $\alpha_2=\frac{1}{2}\arg\frac{f_{\bar z}}{f_z}+\frac{\pi}{2}$

дужина велике полуосе је $|f_z(z)|+|f_{\bar z}(z)|=\max_\alpha|df(z)(e^{i\alpha})|=:\Lambda_f(z)$

а дужина мале полуосе је $|f_z(z)|-|f_{\bar z}(z)|=\min_\alpha|df(z)(e^{i\alpha})|=:\lambda_f(z)$

Дакле, са новим ознакама је: $D_f(z)=\frac{\Lambda_f(z)}{\lambda_f(z)}$ и ако означимо $\mu_f(z)=\frac{f_{\bar z}(z)}{f_z(z)}$

КОМПЛЕКСНА ДИЛАТАЦИЈА

Онда је $D_f(z)=\frac{1+|\mu_f(z)|}{1-|\mu_f(z)|}$.

$\alpha_1=\frac{1}{2}\arg\mu_f(z)$

$\alpha_2=\frac{1}{2}\arg\mu_f(z)+\frac{\pi}{2}$

правци у dw равни:

$$\underbrace{df(z)(e^{i\alpha})}_{w}=f_z e^{i\alpha}+f_{\bar z}e^{-i\alpha}=f_z e^{i\alpha}\left(1+\frac{f_{\bar z}}{f_z}e^{-i\alpha}\right)$$
$$=f_z e^{i\alpha}\left(1+\mu_f e^{-\arg\mu_f}\right)=f_z e^{i\alpha}(1+|\mu_f|)$$

$\arg w=\arg f_z+\alpha \qquad \beta_1=\arg f_z+\alpha,\ \beta_2=\beta_1+\frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\arg f_z+\frac{1}{2}\arg\frac{f_{\bar z}}{f_z}=\frac{1}{2}\left(2\arg f_z+\arg\frac{f_{\bar z}}{f_z}\right)}$$

$$\beta = 2\arg f_z + \arg \frac{f_{\bar z}}{\overline{f_z}}$$

$$e^{i\beta} = e^{2i\arg f_z} \cdot e^{i\arg \frac{f_{\bar z}}{\overline{f_z}}} = \frac{f_z^{2}}{|f_z|^2} \cdot \frac{f_{\bar z}}{\cancel{\overline{f_z}}} \cdot \frac{|f_z|}{|f_{\bar z}|}$$

$$|f_z|^2 = f_z \cdot \overline{f_z}$$

$$e^{i\beta} = \frac{f_z \cdot f_{\bar z}}{\cancel{f_z}\, \overline{f_z}} \, \frac{|f_z|}{|f_{\bar z}|}$$

$$\frac{f_{\bar z}}{\overline{f_z}} = e^{i\beta} \cdot \frac{|f_{\bar z}|}{|f_z|} = e^{i\beta} \cdot \frac{|f_{\bar z}|}{|\overline{f_z}|}$$

$$\Rightarrow \arg \frac{f_{\bar z}}{\overline{f_z}} = \beta$$

Нека је $\nu = \frac{f_{\bar z}}{\overline{f_z}} = \frac{f_{\bar z}}{\overline{f}_{\bar z}}$ II комплексна дилат.

правци: $\frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}\arg \frac{f_{\bar z}}{\overline{f}_{\bar z}} = \beta_1$

$$\beta_2 = \beta_1 + \frac{\pi}{2}$$