Комплексна анализа, В смер
Фебруарски рок, 17.02.2021.

1. **а)** Користећи Коши-Риманове услове испитати диференцијабилност и аналитичност функције $f(z) = z\,\mathrm{Re}\,z + \bar{z}\,\mathrm{Im}\,z + \bar{z}$, а затим одредити њен извод у тачкама у којима је диференцијабилна.

   б) Ако је функција $u(z) = \frac{\sin\theta+\cos\theta}{\rho}$ реални део аналитичке функције $f = f(z)$, где је $z = \rho e^{i\theta}$, одредити f.

2. **а)** Функцију
$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z-1}$$
представити Лорановим развојем у прстену са центром 0, тако да конвергира у тачки $z = \frac{1}{2}$.

   б) Израчунати $\int\limits_{|z|=r} f(z)dz$, у зависности од позитивног реалног броја $r \neq 1$.

3. Одредити вредност интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin kx}{x(x^2+a^2)^2}dx$ у зависности од параметара $k \in \mathbb{N}$ и $a \neq 0, a \in \mathbb{R}$.

4. **а)** Одредити билинеарно пресликавање f које слика тачке i и 1 редом у 0 и $-i$, а кружницу $\{z \in \mathbb{C} : |z-1+i| = 1\}$ слика на праву $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,z = -i\}$.

   б) Добијеним пресликавањем f пресликати област $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,z > 0, \mathrm{Im}\,z > 0\}$.

5. Нека је $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ област тако да је $\overline{\mathbb{D}} \subseteq \Omega$. Ако је f холоморфна и неконстантна функција на Ω и $r \geq 0$ тако да важи $|f(z)| = r$, за све $z \in \partial\mathbb{D}$, доказати да f има бар једну нулу у $\mathbb{D}$.

Комплексна анализа, В смер
Фебруарски рок, 17.02.2021.

1. **а)** Користећи Коши-Риманове услове испитати диференцијабилност и аналитичност функције $f(z) = z\,\mathrm{Re}\,z + \bar{z}\,\mathrm{Im}\,z + \bar{z}$, а затим одредити њен извод у тачкама у којима је диференцијабилна.

   б) Ако је функција $u(z) = \frac{\sin\theta+\cos\theta}{\rho}$ реални део аналитичке функције $f = f(z)$, где је $z = \rho e^{i\theta}$, одредити f.

2. **а)** Функцију
$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z-1}$$
представити Лорановим развојем у прстену са центром 0, тако да конвергира у тачки $z = \frac{1}{2}$.

   б) Израчунати $\int\limits_{|z|=r} f(z)dz$, у зависности од позитивног реалног броја $r \neq 1$.

3. Одредити вредност интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin kx}{x(x^2+a^2)^2}dx$ у зависности од параметара $k \in \mathbb{N}$ и $a \neq 0, a \in \mathbb{R}$.

4. **а)** Одредити билинеарно пресликавање f које слика тачке i и 1 редом у 0 и $-i$, а кружницу $\{z \in \mathbb{C} : |z-1+i| = 1\}$ слика на праву $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,z = -i\}$.

   б) Добијеним пресликавањем f пресликати област $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,z > 0, \mathrm{Im}\,z > 0\}$.

5. Нека је $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ област тако да је $\overline{\mathbb{D}} \subseteq \Omega$. Ако је f холоморфна и неконстантна функција на Ω и $r \geq 0$ тако да важи $|f(z)| = r$, за све $z \in \partial\mathbb{D}$, доказати да f има бар једну нулу у $\mathbb{D}$.