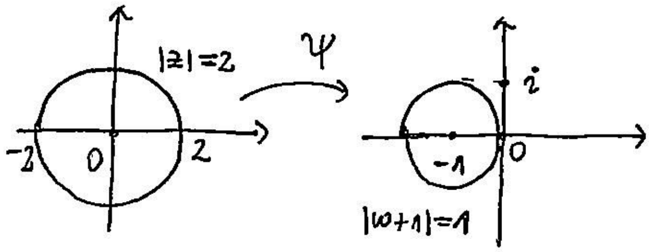
③ Одредити билинеарно пресликавање које -2 слика у 0, 0 слика у i и кружницу $k_1=\{z\in\mathbb{C}: |z|=2\}$ слика на кружницу $k_2=\{w\in\mathbb{C}: |w+1|=1\}$.

$$\psi: -2\mapsto 0$$
$$0\mapsto i$$



На основу теореме z симетричне тачке у односу на k_1 се морају сликати у симетричне тачке у односу на k_2 па се ∞ слика у w_0 где је w_0 симетрична са i у односу на K_2

$$0\mapsto i$$
$$\infty\mapsto w_0$$

(0 и ∞ су симетричне у односу на K_1)

$$h(z)=\frac{R^2}{\overline{z-z_0}}+z_0, \quad R=1,\ z_0=-1$$

$$h(z)=\frac{1}{\overline{z+1}}-1 \quad \text{инверзија у односу на } K_2$$

$$w_0=h(i)=\frac{1}{\overline{i+1}}-1=\frac{1}{1-i}-1=\frac{1+i}{(1-i)(1+i)}-1=\frac{1+i}{2}-1=\frac{i-1}{2}$$

$$\left.\begin{aligned}\psi(-2)&=0\\ \psi(0)&=i\\ \psi(\infty)&=\frac{i-1}{2}\end{aligned}\right\}\overset{T1}{\Longrightarrow}$$

$$\frac{w-i}{w-\frac{i-1}{2}}:\frac{0-i}{0-\frac{i-1}{2}}=\frac{z-0}{z-\infty}:\frac{-2-0}{-2-\infty}$$

$$\frac{w-i}{w-\frac{i-1}{2}}:\frac{-i}{-\frac{i-1}{2}}=\frac{z}{-2}:\cancel{\frac{z-\infty}{-2-\infty}}\,1$$

$$\frac{w-i}{w-\frac{i-1}{2}}=\frac{z}{-2}\cdot\frac{-i}{-\frac{(i-1)}{2}}$$

$$\frac{w-i}{w-\frac{i-1}{2}} = \frac{z}{-2}\cdot\frac{i}{i-1}\cdot 2 = (-z)\cdot i\cdot\frac{1}{i-1}\cdot\frac{i+1}{i+1}$$

$$w-i = \left(w-\frac{i-1}{2}\right)\cdot(-z)\cdot i\,\frac{i+1}{i^2-1}$$

$$w-i = \left(w-\frac{i-1}{2}\right)\cdot(-z)\cdot i\cdot\frac{i+1}{-2} = \left(w-\frac{i-1}{2}\right)\cdot z\,\frac{i^2+i}{2}$$

$$w-i = \left(w-\frac{i-1}{2}\right)\cdot z\cdot\frac{i-1}{2} = wz\,\frac{i-1}{2} - z\cdot\left(\frac{i-1}{2}\right)^2$$

$$w\left(1-z\,\frac{i-1}{2}\right) = i - z\cdot\frac{\cancel{i^2-2i+1}}{4} = i + z\cdot\frac{i}{2}$$

$$w = \frac{i\left(1+\frac{z}{2}\right)}{1-\frac{zi-z}{2}} = \frac{i\cdot(2+z)}{2-zi+z}$$

$$\boxed{\psi(z) = \frac{(z+2)\cdot i}{z(1-i)+2}}$$

! Провера да се k_1 слика на k_2:

$$|z|=2 \longmapsto |w+1|=1 \quad ?$$

$$|z|=2,\ |\psi(z)+1| = \left|\frac{(z+2)i}{z(1-i)+2}+1\right| = \left|\frac{(z+2)i+z(1-i)+2}{z(1-i)+2}\right|$$

$$= \left|\frac{\cancel{zi}+2i+z-\cancel{zi}+2}{z(1-i)+2}\right| = \left|\frac{z+2+2i}{z(1-i)+2}\right|$$

$$z = 2e^{it}$$

$$|\psi(z)+1| = \left|\frac{2e^{it}+2+2i}{2e^{it}(1-i)+2}\right| = \left|\frac{e^{it}+1+i}{e^{it}(1-i)+1}\right|$$

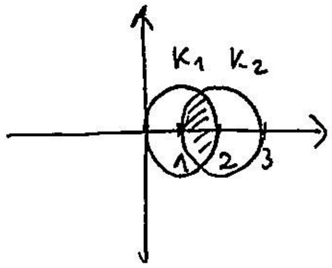
$$= \left|\frac{\cos t+1+i(\sin t+1)}{(\cos t+i\sin t)(1-i)+1}\right| = \left|\frac{\cos t+1+i(\sin t+1)}{\cos t+i\sin t-i\cos t+\sin t+1}\right| = 1$$

јер је $(\cos t+\sin t+1)^2+(\sin t-\cos t)^2$

$$= (\cos t+1)^2 + 2(\cos t+1)\sin t + \sin^2 t + \sin^2 t - 2\sin t\cos t + \cos t$$

$$= (\cos t+1)^2 + 2\sin t + \sin^2 t + 1 = (\cos t+1)^2 + (\sin t+1)^2$$

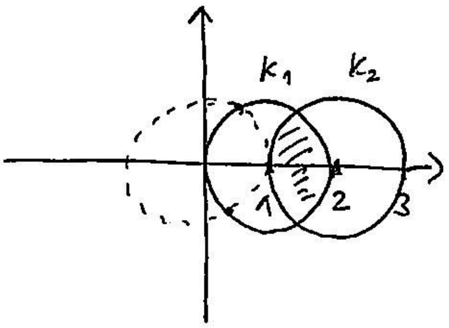
(4) Пресликавањем $w = \frac{1}{z}$ пресликати област $\{z\in\mathbb{C} : |z-2|<1 ,\ |z-1|<1\}$



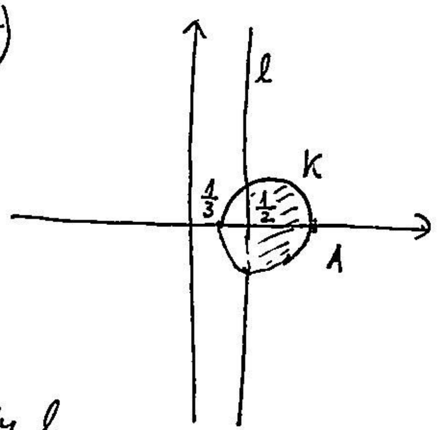
$K_1 = \{z\in\mathbb{C} : |z-1|<1\}$

$K_2 = \{z\in\mathbb{C} : |z-2|<1\}$

$w = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$



$w_1 = \frac{1}{z}$



K_1 се слика на праву l

а K_2 на кружницу k

$3 \mapsto \frac{1}{3}$

$1 \mapsto 1$

l: $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$

k: $|z - \frac{2}{3}| = \frac{1}{3}$

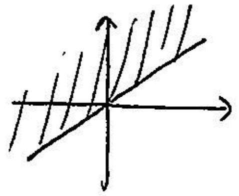
- унутрашњост K_1 се слика у десну полураван са гран. l јер $1 \mapsto 1$ (важи принцип очувања области)
- унутрашњост K_2 се слика на унутрашњост k јер $2 \mapsto \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \in \operatorname{int} k$

$\Rightarrow$ осенчени део површи се слика на осенчени део тј. на $\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \frac{1}{2},\ |z-\frac{2}{3}| < \frac{1}{3}\}$

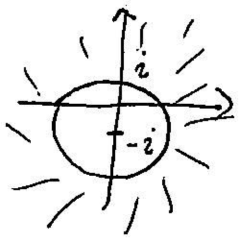
- рефлексија у односу на x осу ништа не мења ($w_2 = \bar{z}$)

Дакле, слика је $\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \frac{1}{2},\ |z-\frac{2}{3}| < \frac{1}{3}\}$

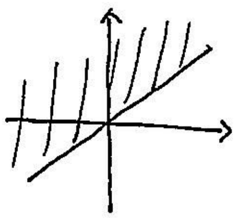
① Одредити бар 1 билинеарно пресликавање којим се област $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > \operatorname{Re} z\}$ пресликава на област $\{w \in \mathbb{C} : |w+i| > 2\}$.



$\xrightarrow{\ \omega = \phi(z)\ }$?

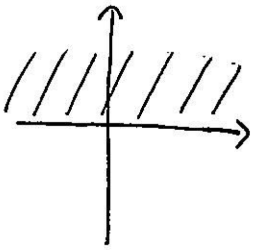


(граница се слика на границу — у неком моменту ћемо искористити инверзију да би се права сликала у кружницу)

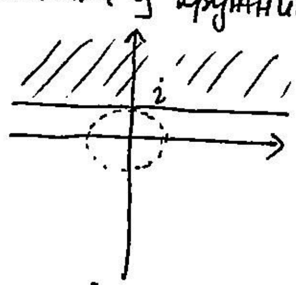


$\xrightarrow{\ w_1 = z \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}\ }$

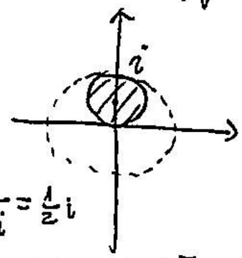
ротација за $\frac{\pi}{4}$ у негат. смеру



$\xrightarrow{\ w_2 = w_1 + i\ }$



$\xrightarrow{\ w_3 = \frac{1}{\overline{w_2}}\ }$

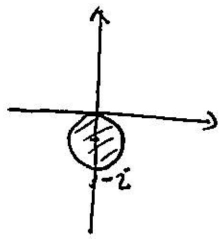


$2i \longmapsto \frac{1}{-2i} = \frac{1}{2} i$

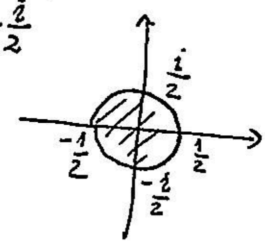
слика је унутрашњост кружнице тј.

$\{w_3 \in \mathbb{C} : |w_3 - \frac{i}{2}| < \frac{1}{2}\}$

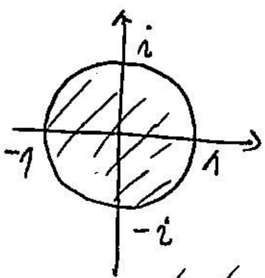
$\xrightarrow{\ w_4 = \overline{w_3}\ }$



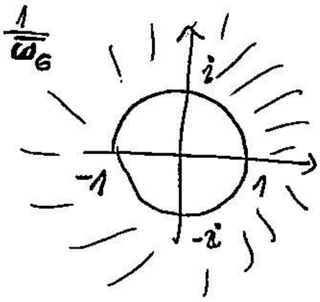
$\xrightarrow{\ w_5 = w_4 + \frac{i}{2}\ }$



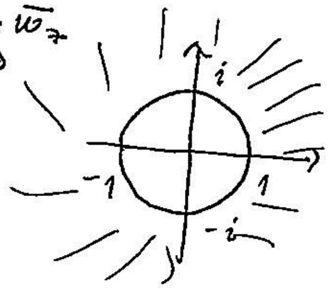
$\xrightarrow{\ w_6 = 2 \cdot w_5\ }$



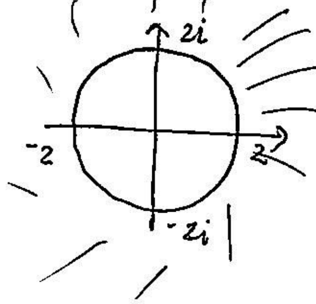
$\xrightarrow{\ w_7 = \frac{1}{\overline{w_6}}\ }$



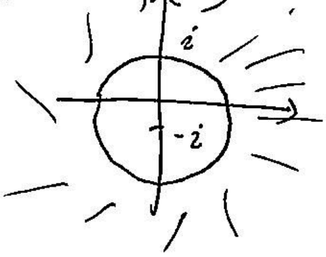
$\xrightarrow{\ w_8 = \overline{w_7}\ }$



$\xrightarrow{\ w_9 = 2 \cdot w_8\ }$



$\xrightarrow{\ w_{10} = w_9 - i\ }$



$$\omega = \omega_{10} = w_9 - i = 2w_8 - i = 2 \cdot \frac{1}{w_6} - i$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2w_5} - i = \frac{1}{w_4 + \frac{i}{2}} - i = \frac{1}{\frac{1}{w_2} + \frac{i}{2}} - i$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{w_1 + i} + \frac{i}{2}} - i$$

$$w = \frac{1}{\frac{1}{ze^{-i\frac{\pi}{4}}+i}+\frac{i}{2}} - i = \frac{1}{\frac{2+i(ze^{-i\frac{\pi}{4}}+i)}{2(ze^{-i\frac{\pi}{4}}+i)}} - i$$

$$= \frac{2(ze^{-i\frac{\pi}{4}}+i)}{2+i(ze^{-i\frac{\pi}{4}}+i)} - i = \frac{2(z(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})+i) - i(2+i(z(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})+i))}{2+i(z(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2})+i)}$$

$$= \frac{2z\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)+\cancel{2i}-\cancel{2i}+z\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)+i}{2+i\cdot z\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)-1}$$

$$= \frac{z\sqrt{2}(1-i)+\frac{z\sqrt{2}}{2}(1-i)+i}{1+z\frac{\sqrt{2}}{2}(i+1)} \quad \begin{matrix} /\cdot 2 \\ /\cdot 2 \end{matrix}$$

$$= \frac{2z\sqrt{2}(1-i)+z\sqrt{2}(1-i)+2i}{2+z\sqrt{2}(i+1)} = \frac{3z\sqrt{2}(1-i)+2i}{z\sqrt{2}(1+i)+2}$$

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{1^2-i^2} = \frac{\cancel{1}+2i+\cancel{i^2}}{1+1} = i$$

$$= \frac{3z\sqrt{2}+2\cdot\frac{i}{1-i}}{z\sqrt{2}\cdot i+\frac{2}{1-i}}$$

$$\frac{2}{1-i} = \frac{2}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i} = \frac{2(1+i)}{2} = 1+i$$

$$= \frac{3z\sqrt{2}+i-1}{z\sqrt{2}\cdot i+1+i}$$

$$\frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{1^2-i^2} = \frac{i-1}{2}$$

$$\boxed{w = \phi(z) = \frac{3z\sqrt{2}+i-1}{z\sqrt{2}\cdot i+1+i}}$$

* Пресликавање $w = f(z) = z^2$

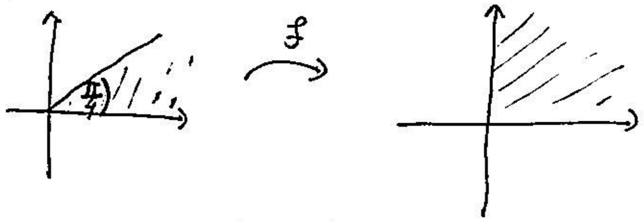
Нека је $S \subseteq \mathbb{C}$ такав да важи: $(\forall z_1, z_2 \in S)\ z_1 \neq z_2 \Rightarrow z_1 + z_2 \neq 0$

Тада је: $z_1^2 = z_2^2 \Rightarrow (z_1 - z_2)\underbrace{(z_1 + z_2)}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow z_1 = z_2$

тј. f је 1-1 на S

Примери:

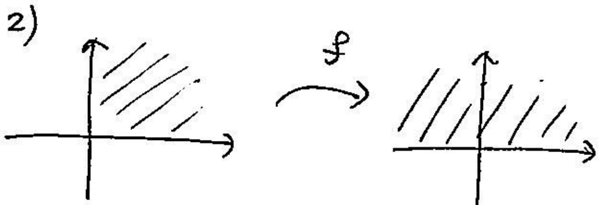
1)



$z = re^{i\theta}, \theta \in (0, \frac{\pi}{4})$

$f(z) = z^2 = r^2 e^{2i\theta}, 2\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

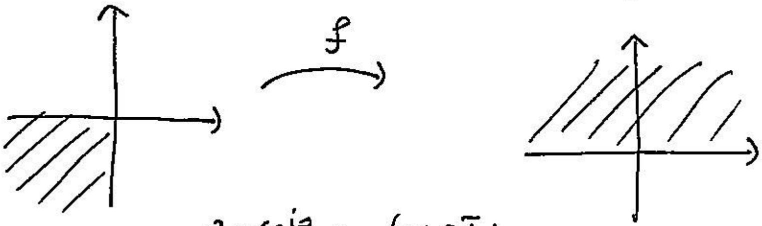
2)



$z = re^{i\theta}, \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$

$f(z) = r^2 e^{2i\theta}, 2\theta \in (0, \pi)$

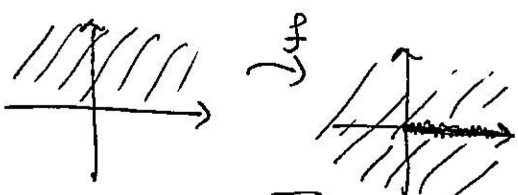
3)



$z = re^{i\theta}, \theta \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$

$g(z) = r^2 e^{2i\theta}, 2\theta \in (2\pi, 3\pi)$

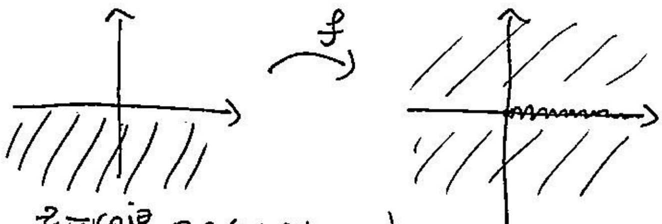
4)



$z = re^{i\theta}, \theta \in (0, \pi)$ $\quad \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$

$f(z) = r^2 e^{2i\theta}, 2\theta \in (0, 2\pi)$

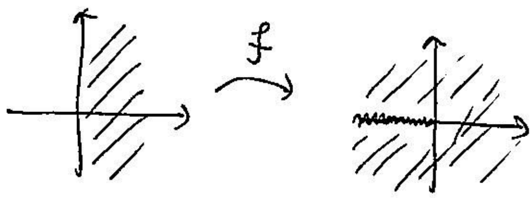
5)



$z = re^{i\theta}, \theta \in (\pi, 2\pi)$

$f(z) = r^2 e^{2i\theta}, \theta \in (2\pi, 4\pi)$ $\quad \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$

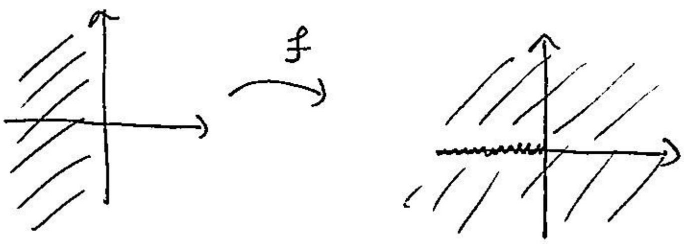
6)



$z = re^{i\theta}, \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $\quad \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

$f(z) = r^2 e^{2i\theta}, 2\theta \in (-\pi, \pi)$

7)



$z = re^{i\theta}, \theta \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ $\quad \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

$f(z) = r^2 e^{2i\theta}, 2\theta \in (\pi, 3\pi)$

⑤ Одредити $f(\mathbb{D})$ ако је $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$. (пазите – сада f није билинеарно)

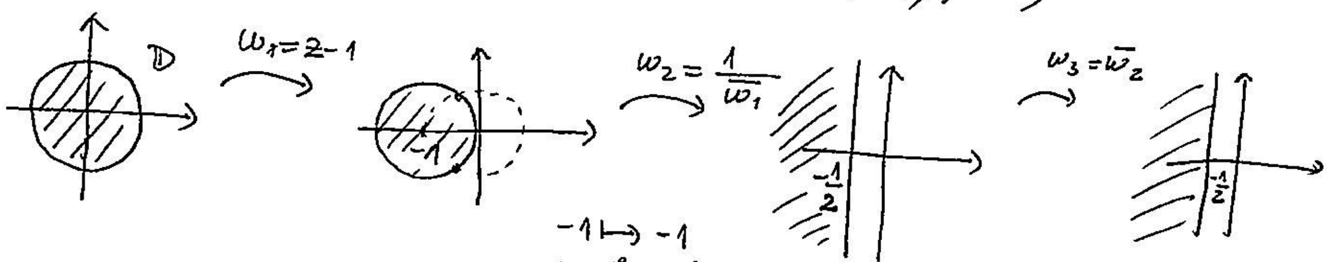
$$w = f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{(1+z)^2-(1-z)^2}{4(1-z)^2} = \frac{1}{4}\Big(\big(\underbrace{\tfrac{1+z}{1-z}}_{\text{билинеарно је!}}\big)^2 - 1\Big)$$

$$\left.\begin{aligned}(1-z)^2 &= 1-2z+z^2\\ (1+z)^2 &= 1+2z+z^2\end{aligned}\right\}\ (1+z)^2-(1-z)^2 = 4z$$

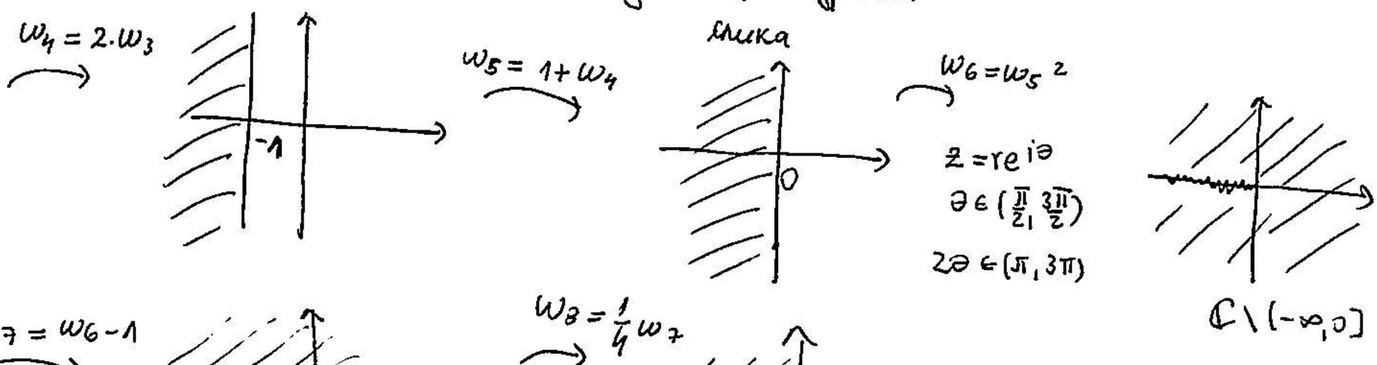
Записаћемо као композицију једноставнијих пресликавања:

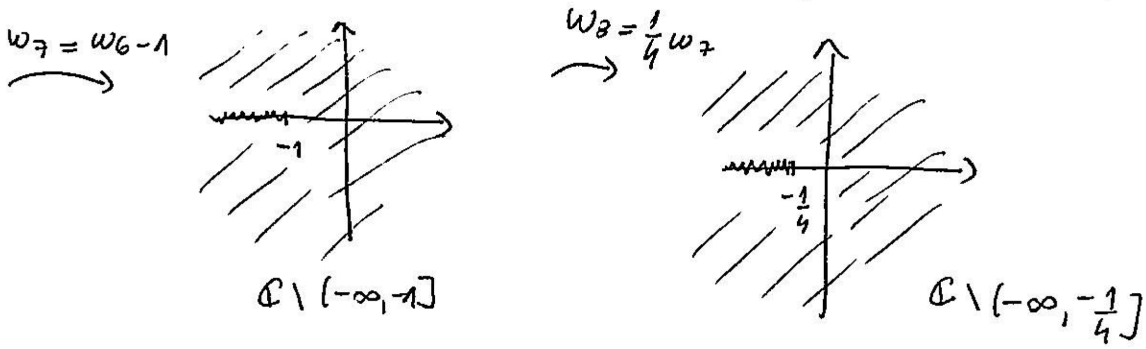
$$w = f(z) = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 - 1\right) = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{z-1+2}{z-1}\right)^2 - 1\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\left(1+\frac{2}{z-1}\right)^2 - 1\right) = \frac{1}{4}\left(\left(1+2\cdot\overline{\left(\frac{1}{\overline{z-1}}\right)}\right)^2 - 1\right)$$



$-1 \mapsto -1$
па је лева полураван слика





<u>Напомена:</u> фја $\frac{z}{(1-z)^2}$ се назива Кебеова фја и игра битну улогу у геометријској теорији функција.