ДОДАТАК:

① Нека је функција $f=u+iv$ холоморфна у области Ω. Показати да је функција $u\cdot v$ хармонијска у Ω.

Из Т1 следи да су u и v хармонијске, тј. $u,v\in C^2(\Omega)$ и $\Delta u=\Delta v=0$.

$u,v\in C^2(\Omega) \Rightarrow u\cdot v\in C^2(\Omega)$

Остаје да се покаже $\Delta(u\cdot v)=0$.

$$\Delta(u\cdot v)=(u\cdot v)_{xx}+(u\cdot v)_{yy}$$

$$+\begin{cases}(u\cdot v)_{xx}=((u\cdot v)_x)_x=(u_x\cdot v+u\cdot v_x)_x=u_{xx}\cdot v+u_x\cdot v_x+u_xv_x+u\cdot v_{xx}\\ (u\cdot v)_{yy}=((u\cdot v)_y)_y=(u_yv+uv_y)_y=u_{yy}\cdot v+u_y\cdot v_y+u_y\cdot v_y+uv_{yy}\end{cases}$$

$$\Delta(uv)=v\cdot\overset{0}{\Delta u}+2u_xv_x+2u_yv_y+u\cdot\overset{0}{\Delta v}$$

$$\Delta(uv)=2u_x\cdot v_x+2u_y\cdot v_y$$

$$\Delta(uv)\underset{\uparrow}{=}2\cdot v_y\cdot(-u_y)+2u_y\cdot v_y=0$$

КР услови
$u_x=v_y$
$u_y=-v_x$

2. начин: за $f=u+iv$ је $f^2=u^2-v^2+2i\cdot u\cdot v$

f аналитичка $\Rightarrow f^2$ аналитичка $\overset{T1}{\Rightarrow}$ $\mathrm{Im}\left(\frac{f^2}{2}\right)$ је хармонијска
(и $\frac{f^2}{2}$ аналитичка) $\qquad \mathrm{Im}\left(\frac{f^2}{2}\right)=u\cdot v$

тј. uv је хармонијска

$\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$

(2) Доказати да је функција $u(x,y) = \ln(x^2+y^2)$, $z = x+iy \in \mathbb{C}^*$ хармонијска у $\mathbb{C}^*$. Доказати затим да та фја не може бити реални део неке аналитичке фје у $\mathbb{C}^*$ (тј. нема хармонијски конјуговану фју у $\mathbb{C}^*$)

$$u_x = \frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x \qquad u_{xx} = \frac{2(x^2+y^2) - 2x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$u_y = \frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y \qquad u_{yy} = \frac{2(x^2+y^2) - 2y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$\Rightarrow \Delta u = 0$ и је харм. на $\mathbb{C}^*$

ПП: $\exists v$ хармонијска на $\mathbb{C}^*$ тд. $f = u + iv$ аналитичка на $\mathbb{C}^*$

$$\Rightarrow f' = f_x = u_x + i\cdot v_x \underset{\substack{\uparrow \\ v_x = -u_y \text{ (КР услови)}}}{=} u_x - i u_y = \frac{2x}{x^2+y^2} - i\cdot\frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{2}{|z|^2}\cdot \bar{z} = \frac{2\bar{z}}{z\bar{z}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(z) = \frac{2}{z}},\ z\in\mathbb{C}^*$$

Дакле, фја $g(z) = \frac{2}{z}$ има примитивну фју f у $\mathbb{C}^*$.

Међутим, важи следеће:

ако је $\gamma : z(t) = e^{it}$, $t\in[0,2\pi)$ јединична кружница

$$\int_\gamma g(z)\,dz = \int_\gamma \frac{2}{z}\,dz = 2\cdot\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 2\cdot\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}}\cdot\underbrace{e^{it}\cdot i\,dt}_{z'(t)dt}$$

$$= 2\cdot\int_0^{2\pi} i\,dt = 2i\cdot 2\pi = 4\pi i$$

Са друге стране $\int_\gamma g(z)\,dz \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ примитивна} \\ \text{за } g}}{=} 0$ јер g има примитивну, а γ је петља

$0 \neq 4\pi i$

$\Downarrow$

$\nexists$ тражено v!

Напомена: $\mathbb{C}^*$ није просто повезана област!

Дакле, ево примера да ако област није просто повезана, хармонијска фја не мора бити реални део неке аналитичке!

③ Нека су u и v фје класе $C^2(D)$, $D \subseteq \mathbb{C}$ области и $f(z) = u(z) + iv(z)$
$z \in D$.

Доказати: $\Delta f(z) = 4 f_{z\bar{z}}(z)$, $z \in D$.

$$\Delta f = \Delta u + i \Delta v \qquad f_z = \frac{1}{2}(f_x - i f_y)$$

$$f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + i f_y)$$

$$f_{z\bar{z}} = (f_z)_{\bar{z}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}(f_x - i f_y)\right)_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(u_x + i v_x - i(u_y + i v_y)\right)_{\bar{z}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_x + v_y + i(v_x - u_y)\right)_{\bar{z}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(u_x + v_y + i(v_x - u_y))_x + \frac{1}{2} i \cdot (u_x + v_y + i(v_x - u_y))_y\right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(u_{xx} + v_{yx} + i(\underline{\underline{v_{xx}}} - u_{yx}) + i(u_{xy} + \underline{\underline{v_{yy}}}) - (v_{xy} - u_{yy})\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(u_{xx} + u_{yy} + \cancel{v_{yx}} + i(v_{xx} + v_{yy}) - \cancel{i u_{yx}} + \cancel{i u_{xy}} - \cancel{v_{xy}}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(\Delta u + i \Delta v) = \frac{1}{4} \Delta f$$

(*) Из ③ следи: Ако је f хармонијска на области D, онда је f_z аналитичка на D.

(јер је $(f_z)_{\bar{z}} = \frac{1}{4}\Delta f = 0$, а знамо да ако је

$g_{\bar{z}} = 0$ онда је g аналитичка (на некој области))

(Т) Ако је $D \subseteq \mathbb{C}$ просто повезана област и f аналитичка на D, онда ф-ја f има примитивну ф-ју на D. ($\exists g$ анал. на D т.д. $g' = f$)

(4) Показати: 1) $\overline{f_z} = \bar{f}_{\bar z}$

2) $\overline{f_{\bar z}} = \bar{f}_z$

$f = u + iv$

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - i f_y) = \frac{1}{2}\left(u_x + i v_x - i(u_y + i v_y)\right) = \frac{1}{2}\left(u_x + v_y + i(v_x - u_y)\right)$$

$$f_{\bar z} = \frac{1}{2}(f_x + i f_y) = \frac{1}{2}\left(u_x + i v_x + i(u_y + i v_y)\right) = \frac{1}{2}\left(u_x - v_y + i(v_x + u_y)\right)$$

$$\overline{f_z} = \frac{1}{2}\left(u_x + v_y - i(v_x - u_y)\right)$$

$$\bar f = u - iv$$

$$\bar f_{\bar z} = \frac{1}{2}(\bar f_x + i \bar f_y) = \frac{1}{2}\left(u_x - i v_x + i(u_y - i v_y)\right) = \frac{1}{2}\left(u_x + v_y + i(u_y - v_x)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{f_z} = \bar f_{\bar z}}$$

$$\bar f_z = \frac{1}{2}(\bar f_x - i \bar f_y) = \frac{1}{2}\left(u_x - i v_x - i(u_y - i v_y)\right) = \frac{1}{2}\left(u_x - v_y - i(v_x + u_y)\right)$$

$$\overline{f_{\bar z}} = \frac{1}{2}\left(u_x - v_y - i(v_x + u_y)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar f_z = \overline{f_{\bar z}}}$$

(5) Нека је $D \subseteq \mathbb{C}$ просто повезана област и h хармонијска ф-ја у D. Доказати да се тада h може представити у облику

$h(z) = f(z) + \overline{g(z)}$, $z \in D$, где су f и g аналитичке у D.

h хармонијска у D $\underset{(\circledast)}{\Rightarrow}$ h_z је аналитичка у D $\underset{(\mathrm{T})}{\Rightarrow}$ $\exists f$ аналитичка на D т.д. $f' = h_z$ на D.

Посматрајмо ф-ју $g(z) = \overline{h(z) - f(z)}$, $z \in D$. Ако докажемо да је g аналитичка, то је крај задатка. Покажимо $g_{\bar z} = 0$ на D.

$$g_{\bar z} = \bar h_{\bar z} - \bar f_{\bar z} \underset{(4)}{=} \overline{h_z} - \overline{f_z} = \overline{f'} - \overline{f_z} \underset{\substack{f \text{ анал.} \\ \text{па је } f' = f_z}}{=} 0$$