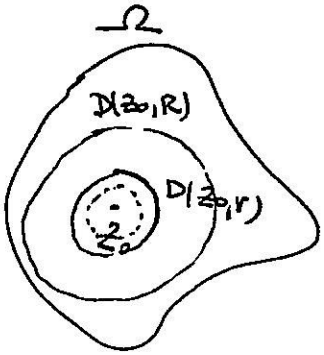
(*) Нуле холоморфне и неконстантне функције у $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ (Ω област) су изоловане. (ПРЕДАВАЊА)

(Ако је $f(z_0)=0$ онда постоји $r>0$ тд. је $f \neq 0$ на $D(z_0,r)\setminus\{z_0\}$)

(5) Нека је f холоморфна фја у области $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ и $f'(z_0) \neq 0$ за неко $z_0 \in \Omega$. Доказати да постоји $r>0$, тако да је $\overline{D}(z_0,r) \subseteq \Omega$ и да за све $0<\varepsilon<r$ важи

$$\int_{\partial D(z_0,\varepsilon)} \frac{1}{f(z)-f(z_0)}\,dz = \frac{2\pi i}{f'(z_0)}.$$



$\partial D(z_0,\varepsilon) = \gamma_\varepsilon$

Пошто за све $\varepsilon \in (0,r)$ треба да важи једнакост то значи да на $D(z_0,r)$ мора бити добро дефинисана фја $\frac{1}{f(z)-f(z_0)}$ тј. да је $f(z)-f(z_0) \neq 0$ на $D(z_0,r)$.

Зато ћемо тако и бирати r, па затим доказати да за тако изабрано r важи $=$. ← НАПОМЕНА

Ω отворен $\Rightarrow (\exists R>0)\ D(z_0,R) \subseteq \Omega$

$f'(z_0) \neq 0 \Rightarrow f$ је неконстантна

$\Rightarrow f-f(z_0)$ је холоморфна и неконстантна фја и анулира се у z_0

Пошто су нуле холоморфне фје изоловане то $\exists r>0$ тд.

$f-f(z_0) \neq 0$ на $D(z_0,r)\setminus\{z_0\}$.

Коначно да је тако изабрано r тражено r.

$\overline{D}(z_0,r) \subseteq D(z_0,R) \subseteq \Omega$ (први услов испуњен)

Посматрајмо функцију:

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}, & z \in D(z_0,r)\setminus\{z_0\} \\ f'(z_0), & z = z_0 \end{cases}$$

Према зад. ① g је холоморфна на $D(z_0,r)$ и g нема нула у $D(z_0,r)$, па је и фја $h=\frac{1}{g}$ холоморфна на $D(z_0,r)$.

Нека је $\varepsilon\in(0,r)$ произвољно.

$$\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{h(z)}{z-z_0}dz=2\pi i\cdot h(z_0) \quad (\text{КИФ})$$

$$h(z_0)=\frac{1}{g(z_0)}=\frac{1}{f'(z_0)}$$

$$\frac{h(z)}{z-z_0}=\frac{1}{g(z)}\cdot\frac{1}{z-z_0}=\frac{z-z_0}{f(z)-f(z_0)}\cdot\frac{1}{z-z_0}=\frac{1}{f(z)-f(z_0)} \quad \forall z\in D(z_0,r),\ z\neq z_0$$

$$\Rightarrow \boxed{2\pi i\cdot\frac{1}{f'(z_0)}=\int_{\gamma_\varepsilon}\frac{1}{f(z)-f(z_0)}dz}$$

Коментар: могли смо да размишљамо „уназад", да тражимо h тд. је

$$\frac{1}{f(z)-f(z_0)}=\frac{h(z)}{z-z_0}$$

у циљу да искористимо КИФ и да нанеситамо шта нам треба!

$$\left.\begin{aligned} h(z_0)&=\frac{1}{f'(z_0)}\\ h(z)&=\frac{z-z_0}{f(z)-f(z_0)}\end{aligned}\right\}$$

хоћемо овакво h да буде холоморфна? кад то урадимо онда нанеситамо g итд. доказујемо да су g и h холоморфне.

⑥ Нека је $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ цела функција и $n \in \mathbb{N}$.

а) Доказати да важи

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} \operatorname{Re} f(e^{it})\, dt$$

б) Ако је $f(0)=1$ и $\operatorname{Re} f(z) > 0$ за све $z \in \mathbb{D}$, доказати да важи

$$|f^{(n)}(0)| \leq 2n!.$$

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ Тејлоров развој f на $\mathbb{C}$ (око 0) , $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Коф: $f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$, $\gamma = \partial \mathbb{D}$ (позитивно оријентисана)

$\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi \cancel{i}} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{e^{it(n+1)}} \cdot \cancel{i} e^{it} dt$$

$$= \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{e^{int}} dt = \frac{n!}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} e^{-int} f(e^{it}) dt$$

$$\operatorname{Re} f = \frac{f + \bar{f}}{2} \qquad \operatorname{Re} f(e^{it}) = \frac{f(e^{it}) + \bar{f}(e^{it})}{2}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-int} \operatorname{Re} f(e^{it}) dt = \int_0^{2\pi} e^{-int} \frac{f(e^{it}) + \bar{f}(e^{it})}{2} dt$$

$$\int_0^{2\pi} e^{-int} \bar{f}(e^{it}) dt = \int_0^{2\pi} e^{-int} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k e^{-it \cdot k} dt$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{-it(n+k)} dt}_{= 0} = 0 \quad (*)$$

ред равн. конвергира

(ово смо рачунали већ пре)

$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi} \cdot \underbrace{2 \cdot \int_0^{2\pi} e^{-int} \operatorname{Re} f(e^{it}) dt}_{\overset{(*)}{=} \int_0^{2\pi} e^{-int} f(e^{it}) dt} = \frac{n!}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} e^{-int} \operatorname{Re} f(e^{it}) dt$$

8) На основу својства средње вредности је

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\,dt = f(0) = 1$$

па преласком на реални део имамо

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(e^{it})\,dt = 1 \qquad |e^{-int}| = 1$$

$$|f^{(n)}(0)| = \frac{n!}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} e^{-int}\operatorname{Re} f(e^{it})\,dt\right| \underset{\text{ОИН}}{\leq} \frac{n!}{\pi}\int_0^{2\pi} |\operatorname{Re} f(e^{it})|\,dt$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re} f(z) > 0 \quad \forall z \in \mathbb{D} \\ \text{Да ли је и } \operatorname{Re} f(e^{it}) \geq 0\,? \end{cases}$$

Ако јесте, добијамо $|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{\pi}\cdot 2\pi = 2n!$.

Важите због непрекидности

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)e^{it} \in \mathbb{D}$$

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)e^{it} \xrightarrow[k\to\infty]{} e^{it}$$

$$\operatorname{Re} f\left(\left(1-\frac{1}{k}\right)e^{it}\right) > 0 \quad \text{јер } \left(1-\frac{1}{k}\right)e^{it} \in \mathbb{D}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \operatorname{Re} f\left(\left(1-\frac{1}{k}\right)e^{it}\right) \geq 0$$

$$\| \text{ непр. } \operatorname{Re}$$

$$\operatorname{Re} \lim_{k\to\infty} f\left(\left(1-\frac{1}{k}\right)e^{it}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{Re} f(e^{it}) \geq 0}$$