Задатак:

① Нека је $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ цела функција. Доказати да је тада фја f неконстантан полином акко важи $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$.

Један смер је тривијалан: Ако је f неконстантан полином јасно је да важи $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$

$$\left(\begin{matrix} f(z)=a_n z^n+\dots+a_1 z+a_0 \xrightarrow[z\to\infty]{} \infty \\ a_n\neq 0,\ n\geq 1 \end{matrix}\right)$$

Да бисмо доказали други смер, тј. да је f цела и важи $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$.

Нека је $g(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)$, $\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ $\left(\mathbb{C}\setminus\{0\}=\mathbb{C}^\times\right)$

g је добродеф и холоморфна на $\mathbb{C}^\times$

$$\lim_{z\to0} g(z)=\lim_{z\to0} f\left(\frac{1}{z}\right)=\lim_{z\to\infty} f(z)=\infty$$

$\Rightarrow$ 0 је пол фје g (нека је ред пола m)

тј. $g(z)=\dfrac{a_{-m}}{z^m}+\dots+\dfrac{a_{-1}}{z}+a_0+a_1z+\dots$

$$=\frac{1}{z^m}\underbrace{\left(a_{-m}+a_{-m+1}z+\dots\right)}_{h(z)},\quad z\in\mathbb{C}^\times,\ a_{-m}\neq0$$

h је холоморфна на $\mathbb{C}$, јер је представљена конвергентним степеним редом

$h(0)=a_{-m}$, $h(z)=z^m\cdot g(z)$, $\forall z\in\mathbb{C}^\times$

* непрекидна фја на компакту достиже max
означимо: $\max\limits_{\overline{\mathbb{D}}}|h|=c$
$\max\limits_{\overline{\mathbb{D}}}|f|=d$

$$f(z)=g\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{h\left(\frac{1}{z}\right)}{\left(\frac{1}{z}\right)^m}=z^m\cdot h\left(\frac{1}{z}\right),\quad \forall z\in\mathbb{C}^\times$$

- за $z\in\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}$ је $\frac{1}{z}\in\mathbb{D}$ па је $\left|h\left(\frac{1}{z}\right)\right|\leq c$

$\Rightarrow$ $|f(z)|\leq c\cdot|z^m|=c\cdot|z|^m$

- за $z\in\overline{\mathbb{D}}$ је $|f(z)|\leq d$

Дакле, $\forall z\in\mathbb{C}$ је $|f(z)|\leq c\cdot|z|^m+d$

Докажимо сада да из $|f(z)| \leq c \cdot |z|^m + d$ следи да је f полином степена не веће од m.

f цела $\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \ \forall z \in \mathbb{C}$ (Тејлоров развој)

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$ γ_r позит. оријентисана кружница са центром 0 и полупречника $r > 0$

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right|$$

$$\underset{\text{ОИН}}{\leq} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}} |dz| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{c|z|^m + d}{|z|^{n+1}} |dz|$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{c \cdot r^m + d}{r^{n+1}} |dz| = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{c r^m + d}{r^{n+1}} \cdot \ell(\gamma_r)$$

$$= \frac{1}{\cancel{2\pi}} \cdot \frac{c \cdot r^m + d}{r^{n+1}} \cdot \cancel{2} r \cancel{\pi} = \frac{c \cdot r^m + d}{r^n}$$

за $m < n$ је $\lim_{r \to +\infty} \frac{c \cdot r^m + d}{r^n} = 0$, па је за $m < n$ $|a_n| = 0$ тј. $a_n = 0$

$$\Rightarrow f(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

Дакле, f је полином степена највише m.

(за овај део смо се могли позвати на зад 2 са прошлог часа)

② Доказати да не постоји холоморфна функција $f:\mathbb{C}^\times\to\mathbb{C}$, таква да важи

$$|f(z)|\geq \frac{1}{\sqrt{|z|}}, \ \forall z\in\mathbb{C}^\times.$$

Птс. постоји таква функција

$f:\mathbb{C}^\times\to\mathbb{C}$ холоморфна

и $|f(z)|\geq \frac{1}{\sqrt{|z|}}$, $\forall z\in\mathbb{C}^\times$

Из $|f(z)|\geq \frac{1}{\sqrt{|z|}}$ следи да је $f(z)\neq 0$ $\forall z\in\mathbb{C}^\times$

$\Rightarrow$ можемо уочити функцију $g(z)=\frac{1}{f(z)}$, g је холоморфна на $\mathbb{C}^\times$

и $|g(z)|=\frac{1}{|f(z)|}\leq\sqrt{|z|}$ $\forall z\in\mathbb{C}^\times$

g има изоловани сингуларитет у 0

$|g(z)|\leq\sqrt{|z|}<1$ $\forall z\in\mathbb{D}$

па је $g|_{\mathbb{D}^\times}:\mathbb{D}^\times\to\mathbb{C}$ холоморфна и ограничена

фја $\Rightarrow$ сингуларитет у 0 је отклоњив

$\Rightarrow$ $g:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ је холоморфна фја јер је отклоњен сингуларитет у 0

$\Rightarrow$ $g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ је цела фја

$|g(z)|\leq\sqrt{|z|}$ $\quad / \lim\limits_{z\to 0}$

$\Rightarrow g(0)=0$ (g је непрекидна)

$\forall z\in\mathbb{C}$ $|g(z)|\leq|z|^{\frac{1}{2}}$, g цела

$\Rightarrow$ на исти начин као у претходном задатку

(Тејлоров развој + КИФ + ОИН итд.)

добија се да је g константна фја (сви коеф. у Т.р. ће бити 0 осим a_0)

$\Rightarrow g(z)=a_0 \quad \forall z\in\mathbb{C}$

Пошто већ имамо $g(0)=0$, онда је $a_0=0$

тј. $g(z)=0 \ \forall z\in\mathbb{C}$, а то је немогуће јер смо дефинисали $g(z)=\frac{1}{f(z)}$.

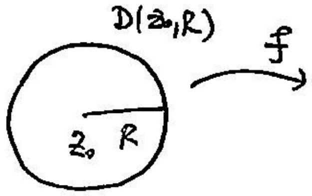
$$\left(\frac{1}{f(z)}=0 \quad \forall z\in\mathbb{C}^\times \quad \nexists \right)$$

③ Нека је $f: D^\times(z_0,R)\to\mathbb{C}$ холоморфна функција при чему је тачка z_0 њен есенцијални сингуларитет. Доказати да је скуп $f(D^\times(z_0,R))$ густ у $\mathbb{C}$.

Претпоставимо да скуп $f(D^\times(z_0,R))$ није густ у $\mathbb{C}$. Тада важи

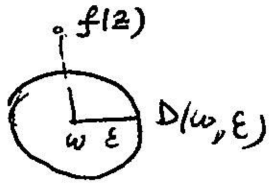
$$\mathbb{C}\setminus\overline{f(D^\times(z_0,R))}\neq\emptyset$$

тј. $\exists w\in\mathbb{C}\setminus\overline{f(D^\times(z_0,R))}$.



Пошто је $\mathbb{C}\setminus\overline{f(D^\times(z_0,R))}$ отворен скуп

$\Rightarrow \quad (\exists\varepsilon>0)\ D(w,\varepsilon)\subseteq\mathbb{C}\setminus\overline{f(D^\times(z_0,R))}$.



$$\Rightarrow \quad |f(z)-w|\geq\varepsilon>0 \quad \forall z\in D^\times(z_0,R)$$

$\Rightarrow \quad g(z)=\frac{1}{f(z)-w}$ је добро дефинисана и холоморфна ф-ја на $D^\times(z_0,R)$

и $\quad |g(z)|\leq\frac{1}{\varepsilon}$ на $D^\times(z_0,R)$ тј. ограничена је

$\Rightarrow$ сингуларитет у z_0 ф-је g је отклоњив

$\Rightarrow$ g је холоморфна на $D(z_0,R)$

- Ако је $g(z_0)=0$, онда је $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\lim\limits_{z\to z_0}\left(\frac{1}{g(z)}+w\right)=\infty$, па је z_0 пол ф-је f, што је немогуће јер је z_0 есенцијални сингуларитет.
- Ако је $g(z_0)\neq0$ онда је $g(z)\neq0$ на $D(z_0,R)$ ($g(z)=\frac{1}{f(z)-w}\neq0$ на $D^\times(z_0,R)$) па је $f=\frac{1}{g}+w$ холоморфна на $D(z_0,R)$

, а то би значило да је z_0 отклоњив сингуларитет за f што је немогуће, јер је z_0 есенцијални сингуларитет.

$\Rightarrow$ пп. је погрешна

$\Rightarrow$ $f(D^\times(z_0,R))$ је густ у $\mathbb{C}$.

④ Нека је $f: D^\times(z_0,R) \to \mathbb{C}$ холоморфна функција, при чему је скуп $f(D^\times(z_0,r))$ густ у $\mathbb{C}$ за све $0<r<R$. Доказати да је z_0 есенцијални сингуларитет фје f.

z_0 је изоловани сингуларитет, па мора бити један од 3 типа.
Ако пп. да је z_0 отклоњив сингуларитет и нека је $0<r<R$, тада је f холоморфна на $D(z_0,R)$ и важи $\overline{D}(z_0,r) \subseteq D(z_0,R)$.

$\overline{D}(z_0,r)$ је ~~компактан~~

$\underset{f\text{ непр.}}{\Longrightarrow}$ $f(\overline{D}(z_0,r))$ је компактан $\Rightarrow$ $f(\overline{D}(z_0,r))$ је ограничен

$\Rightarrow$ $f(D^\times(z_0,r))$ није густ у $\mathbb{C}$

Ако пп. да је z_0 пол фје f тада је $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$ (*)

Пошто је за све $r \in (0,R)$ $f(D^\times(z_0,r))$ густ у $\mathbb{C}$ то је за све $n\in\mathbb{N}$ $f(D^\times(z_0,\frac{R}{n+1}))$ густ у $\mathbb{C}$

$\Rightarrow$ постоји $z_n \in D^\times(z_0,\frac{R}{n+1})$ тд. $f(z_n) \in D(1,\frac{1}{n})$ за све $n\in\mathbb{N}$

тј. $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, па и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{f(z_n)} = 1$ а то је у контрадикцији са $\underline{\lim\limits_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)} = 0}$ (*)

$\Rightarrow$ z_0 је есенцијални сингуларитет

*Важи обрат овог тврђења и последица је задатка 3 (директно)!