Биоматематика
Задаци за вежбе

1 Математичка индукција

1.1. Доказати да за све природне бројеве n важе следећи искази

(а) в $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

(б) в $1+4+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(ц) $1+8+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

(д) в $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

(е) в $1+x+x^2+\ldots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$

(ф) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$

(г) $2+4+6+\ldots+2n=n(n+1)$

1.2. Користећи математичку индукцију доказати да је

(а) в $7|2^{n+1}+3^{2n-1}$

(б) в $9|n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$

(ц) $3|5^n+2^{n+1}$

(д) $7|11^{n+2}+5^{2n+1}$

(е) $30|n^5+5n^3-6n$

(ф) $64|3^{2n+3}+40n-27$

1.3. Доказати да за природне бројеве важе следеће неједнакости

(а) в $\frac{3\cdot 7\cdot 11\cdot\ldots(4n-1)}{5\cdot 9\cdot 13\cdot\ldots(4n+1)}<\sqrt{\frac{3}{4n+3}}$

(б) в $2^n>n^2$, за $n\geq 5$

(ц) в $\frac{4^n}{n+1}\leq\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

(д) $(2n)!\leq\frac{(2n+2)^{2n+1}}{2n+1}$

(е) $\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots 2n}\leq\sqrt{\frac{1}{3n+1}}$

1.4. Ако је низ задат рекурентном формулом $a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$, $a_0=2$, $a_1=5$, доказати да је за свако $n\geq 0$ $a_n=2^n+3^n$.

2 Низови

2.1. Доказати по дефиницији

(а) в $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+2}{2n+1}=\frac{1}{2}$

(б) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n-2}{2n-1}=\frac{3}{2}$

(ц) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+(-1)^n}{n}=0$

(д) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{-1}{2})^n$

(е) $\lim\limits_{n\to+\infty}\log_2(1+\sqrt{\frac{1}{n+1}})=0$

2.2. Испитати који од следећих низова су ограничени.

(а) $a_n=\frac{n+1}{n+2}$

(б) $b_n=\frac{3n^2-1}{n^2+1}$

(ц) $c_n=\max\{n,5\}$

(д) $d_n=\frac{2^n}{n!}$

2.3. Испитати који од наведених низова су монотони

(а) $a_n=\frac{n}{n+1}$

(б) $b_n=n^2-8n+12$

2.4. Израчунати

(а) в $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2n+1}{3n-5}\right)^3$

(б) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^2}{n^2+1}$

(ц) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^3-n}{n^2+2n+3}$

(д) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2-4n+5}{n^4+n^3-1}$

(е) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^3+(n-1)^3}$

(ф) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2n^2}{2n+3}-\dfrac{1-3n^3}{3n^2+1}$

(г) в $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+n}-n$

(х) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

(и) в $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$

(ј) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^n+1}{2^n-1}$

(к) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3^n-2^n}{3^{n+1}+2^{n+3}}$

2.5. Користећи теорему о конвергенцији монотоног и ограниченог низа доказати конвергенцију низа (a_n) ако је:

(а) в $a_n=\frac{n^2+1}{3^n}$

(б) в $a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n}$

(ц) $a_n=\frac{1}{4\cdot7}+\frac{1}{7\cdot10}+\ldots+\frac{1}{(3n+1)\cdot(3n+4)}$

2.6. Израчунати применом теореме о полицајцима

(а) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n\sin n!}{n^2+1}$

(б) в $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\cos(2^n(n+3))}{2^n}$

(ц) в $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

2.7. Одредити граничне вредности

(а) в $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\dfrac{1}{2n})^n$

(б) в $\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{n^2+3n+4}{n^2+2n+2})^{2n}$

(ц) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\dfrac{n^2+3}{n^2+1})^{3n}$

2.8. Одредити гранчне вредности

(а) в $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$

(б) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2^{\frac{1}{n+1}}+3^{\frac{1}{n+1}}}{2^{\frac{1}{n}}+3^{\frac{1}{n}}}$

(ц) в $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\ldots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$

(д) в $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$

(е) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2\sqrt[5]{n^2}-3\sqrt[5]{n^3}}{3\sqrt[5]{n^2}+2\sqrt[5]{n^3}}$

(ф) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}}}{\sqrt{10n+\sqrt{8n+\sqrt{6n+\sqrt{4n+\sqrt{2n}}}}}}$

(г) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3n^{\frac{3}{2}}+2n+\sqrt{n}}{5n^{\frac{3}{2}}+5n-3\sqrt{n}}$

(х) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[3]{n^2}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$

(и) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n^2+3}{n^2+2n+3}\right)^{n(n+1)}$

(ј) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}\right)^{3\sqrt{n}}$

2.9. Доказати да су следећи низови конвергентни и одредити $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$

(a) в $a_n = \frac{1}{n!}$
(б) $a_n = \frac{n^n}{3^n n!}$
(ц) в $a_n = \frac{c^n}{n!}$, $c > 0$
(д) $a_n = q^n$, $|q| < 1$

2.10. * Доказати да важе следеће једнакости

(a) в $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{b^n} = 0$, $b > 1$
(б) в $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0$, $a > 1$, $k \in \mathbb{N}$
(ц) в $\lim\limits_{n\to+\infty} nq^n = 0$, $|q| < 1$
(д) $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k q^n = 0$, $|q| < 1$, $k \in \mathbb{N}$
(е) в $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a > 0$
(ф) в $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
(г) в $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\log_a n}{n} = 0$, $a > 1$
(х) $\lim\limits_{n\to+\infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1) = 1$,

2.11. в Одредити тачке нагомилавања низа (a_n) ако је $a_n = \frac{(1+(-1)^n)n^2+n}{3n^2-1} + \cos\frac{2n\pi}{3}$.

2.12. в Нека је $a_n = \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^n + A\sin\frac{n\pi}{2}$, $A \in \mathbb{R}$.

(a) Одредити тачке нагомилавања низа (a_n).
(б) Одредити вредност A тако да низ (a_n) буде конвергентан.

Резултати

2.2. **а)** ограничен. **б)** ограничен **ц)** неограничен **д)** ограничен

2.3. **а)** монотоно растући, **б)** монотоно растући за $n \geq 4$.

2.4. **а)** $\frac{8}{27}$, **б)** 2, **ц)** $+\infty$, **д)** 0, **е)** 0, **ф)** $+\infty$, **г)** $\frac{1}{2}$, **х)** 0, **и)** $\frac{1}{3}$, **ј)** 1, **к)** $\frac{1}{3}$.

2.6. **а)** 0, **б)** 0, **ц)** 1.

2.7. **а)** $\sqrt{e}$, **б)** 1, **ц)** 1.

2.8. **а)** $\frac{1}{2}$, **б)** 1, **ц)** 3, **д)** 1, **е)** $-\frac{3}{2}$, **ф)** $\frac{1}{\sqrt{10}}$, **г)** $\frac{3}{5}$, **х)** 0, **и)** $\frac{1}{3}$, **ј)** 1.

2.9. **а)** 0, **б)** 0, **ц)** 0. **д)** 0.

2.11. $\frac{5}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}$ и 1.

2.12. **а)** $e, e + A$ и $e - A$, **Б)** A\i0.

3 Редови

3.1. Одредити суму реда

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n$

(б) в $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+1)}$

3.2. в Испитати конвергенцију реда $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, $q \in \mathbb{N}$. У случају у ком конвергира, колика је сума?

3.3. Испитати конвергенцију редова са позитивним члановима (а) в $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n+1}$

(б) в $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

(ц) в $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

(д) в $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2n^2+1}$

(е) в $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$

(ф) в $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(г) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^n n!$

(х) в $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^{3n}$

(и) в $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

3.4. Испитати конвергенцију редова са позитивним члановима

(а) в $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n+1}$

(б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

(ц) в $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-2)}$

(д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2$

(е) в $\sum_{n=1}^{\infty}n^k q^n,\ 0<q<1,\ k\in\mathbb{N}$

(ф) в $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\ldots(2+\sqrt{n})}$

(г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot\ldots\cdot n^2}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(4n-3)}$

(х) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 11\cdot\ldots(10n-9)}{(2n-1)!!}$

3.5. Испитати апсолутну и условну конвергенцију алтернирајућих редова

(а) в $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

(б) в $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

(ц) в $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$

(д) в $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\frac{n}{2^n}$

(е) в $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n$

(ф) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$

Резултати

3.1. **а)** $\frac{5}{3}$, **б)** 3.

3.2. **а)** Ред конвергира АККО $|q|<1$ и тада је његова сума $\frac{1}{1-q}$.

3.3. **а)** дивергира (општи члан не тежи нули), **б)** дивергира (еквиконвергентан је реду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$), **ц)** дивергира (општи члан је облика $\frac{1}{n^p}, p=\frac{1}{2}<1$), **д)** дивергира (општи члан не тежи нули), **е)** конвергира (Даламбер) **ф)** конвергира (Даламбер) **г)** конвергира (Даламбер) **х)** конвергира (Коши) **и)** конвергира (еквиконвергентан је реду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$).

3.4. **а)** дивергира (општи члан не тежи нули), **б)** конвергира (Даламбер), **ц)** конвергира (Коши), **д)** дивергира, **е)** конвергира (Даламбер), **ф)** конвергира (Рабе), **г)** дивергира (Даламбер), **х)** дивергира (Даламбер).

3.5. **а)** условно конвергира, **б)** апсолутно конвергира, **ц)** условно конвергира **д)** апсолутно конвергира, **е)** апсолутно конвергира, **ф)** апсолутно конвергира.

4 Лимеси функција и непрекидност

4.1. Доказати по дефиницији

(а) в $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+1}{3-x}=\dfrac{3}{2}$

(б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x-1}{x+1}=1$

(ц) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=+\infty$

(д) $\lim\limits_{x\to -\infty}\ln(-x)=+\infty$

4.2. Одредити леви и десни лимес функције у датој тачки

(а) в $f(x)=\operatorname{sgn} x,\ x=0$

(б) $g(x)=\frac{1}{x-3},\ x=3$

(ц) $h(x)=[x],\ x=4$

(д) $f(x)=x^2+5,\ x=3$

(е) $g(x)=\frac{x+2}{x-5},\ x=5$

(ф) $h(x)=[x^2],\ x=3$

4.3. * Важни лимеси

(а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

(б) $\lim\limits_{x\to +\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$

$\lim\limits_{x\to -\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$

(ц) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

(д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

(е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$

(ф) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

4.4. Израчунати следеће лимесе

(а) в $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$

(б) в $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$

(ц) в $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

(д) в $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$

(е) в $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

(ф) в $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

(г) в $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$

(х) в $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{3}}{\operatorname{tg}^2 2x}$

(и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{x\sin x}$

4.5. Израчунати граничне вредности

(а) в $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

(б) в $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^a-a^x}{x-a}$

(ц) в $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{x}$

(д) в $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x(x+2)}-x\right)$

(е) в $\lim\limits_{x\to +\infty}(\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2})^{x^2}$

(ф) в $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$

(г) в $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}x$

(х) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

4.6. Израчунати граничне вредности

(а) в $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x} \ln \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

(б) в $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{-x}}{\sin x}$

(ц) в $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-\sqrt{x}}$

(д) в $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$

(е) в $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{16+x^2}-4}$

(ф) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)$

(г) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{1-3x+x^3+3x^4}}{(2x+\frac{1}{2})(1-x)}$

4.7. Испитати непрекидност функције у тачки $x=0$

(а) в $f(x)=\frac{\sin x}{x}$

(б) в $f(x)=\operatorname{sgn} x$

(ц) в $f(x)=\frac{1}{x^2}$

(д) в $f(x)=\sin\frac{1}{x}$

4.8. Испитати непрекидност и одредити тип прекида функције

(а) в $f(x)=\begin{cases} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}, & x\notin\{-1,0,1\} \\ 0, & x\in\{-1,0,1\} \end{cases}$

(б) $f(x)=\begin{cases} \frac{x^3-2x^2-3x}{x-3}, & x\neq 3 \\ 10, & x=3 \end{cases}$

(ц) в $f(x)=\begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2}, & x<0 \\ \frac{x^2-4}{x-2}, & 0\le x<2 \\ \sqrt{x^2+5}-3, & x\ge 2 \end{cases}$

(д) $f(x)=\begin{cases} \frac{e^x-1}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$

(е) $f(x)=\begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

(ф) в $f(x)=\begin{cases} \cos x+\sqrt{2}, & x<0 \\ \frac{(1+x)^{\sqrt{2}}-1}{x}, & x\ge 0 \end{cases}$

(г) в $f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}}, & x>0 \end{cases}$

4.9. Одредити $A\in\mathbb{R}$ тако да је функција $g(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq 0 \\ A, & x=0 \end{cases}$ непрекидна

(а) в $f(x)=\frac{(1+x)^3-1}{x}$

(б) $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{x}$

(ц) $f(x)=\frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$

5 Извод функције

5.1. Израчунати извод функције (таблични изводи)

(а) в $f(x)=x^5-4x^3+2x-3$

(б) в $f(x)=\frac{\pi}{x}+\ln 2$

(ц) $f(x)=3x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{5}{2}}+x^{-3}$

(д) в $f(x)=x^2\sqrt[3]{x^7}$

(е) в $f(x)=5\sin x+3\cos x$

(ф) в $f(t)=\arcsin t+2$

5.2. Израчунати извод функције (извод производа и количника)

(а) в $f(x)=x\operatorname{ctg} x$

(б) $f(x)=e^x\cos x$

(ц) в $f(x)=\sin x\ln x 2^x$

(д) в $f(x)=\frac{2x+3}{x^2-5x+5}$

(е) в $f(t)=\frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}}$

(ф) $f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$

(г) в $f(t)=2t\sin t-(t^2-2)\cos t$

(х) $f(t)=\frac{t^2}{\ln t}$

(и) $f(x)=x^{-1}+2\ln x-\frac{\ln x}{x}$

(j) в $f(z)=z\operatorname{arctg} z$

(к) $f(t)=\frac{2}{3t+1}-\frac{2}{t}$

(л) в $f(x)=x^7e^x$

5.3. Израчунати извод функције (извод сложене функције)

(а) в $f(x) = \sqrt{xe^x + x}$

(б) в $f(x) = \sqrt[3]{2e^x - 2^x + 1} + (\ln x)^5$

(ц) $f(x) = \frac{1}{\operatorname{arctg} x}$

(д) в $f(x) = \ln^2 x - \ln\ln x$

(е) в $f(x) = \operatorname{tg}\sqrt{x}$

(ф) в $f(x) = e^{-x^2} + \sin 3x$

(г) в $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$

(х) в $f(x) = \operatorname{ctg}\arcsin x^2$

(и) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\cos^3 x}$

(ј) в $f(x) = x^{x^2}$

(к) в $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$

(л) в $f(x) = x^{x^x}$

5.4. Израчунати следећи лимес и објаснити зашто не може да се израчуна применом лопиталовог правила

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$$

5.5. Израчунати применом лопиталовог правила

(а) в $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$

(б) в $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\sin \alpha x)}{\ln(\sin x)}$

(ц) в $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

(д) в $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$

(е) в $\lim\limits_{x\to 0} (\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1})$

(ф) в $\lim\limits_{x\to 1} (\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x})$

(г) в $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{-x^6} - 1 + x^6}{\operatorname{arctg} x^{12}}$

(х) * $\lim\limits_{x\to 0} (\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2})$

6 Испитивање тока функције

6.1. Одредити област дефинисаности D_f функције:

(а) $f(x) = \arcsin\sqrt{x^2 + x + 1}$,

(б) $f(x) = \ln\dfrac{5 - x}{x^2 - 10x + 24} - \sqrt[3]{x+5}$,

(ц) $f(x) = \sqrt{3 - x} + \arcsin\dfrac{3 - 2x}{5}$.

6.2. Испитати парност функције:

(а) $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$,

(б) $f(x) = \sin x - \cos x$,

(ц) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{\sqrt{6 - x - x^2}}$.

6.3. Одредити минимум и максимум функције $f(x)$ на датом интервалу

(а) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1,\ x \in [-1, 5]$

(б) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1,\ x \in [-10, 12]$

(ц) $f(x) = x^3,\ x \in [-1, 3]$

(д) $f(x) = x^4 + 2,\ x \in [-5, 5]$

6.4. Одредити локалне екстремуме функције

(а) $f(x) = x\ln x$

(б) $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$

(ц) $f(x) = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$

(д) $f(x) = 2\sin 2x + \sin 4x$

6.5. Наћи интервале закривљености и превојне тачке функције

(а) $f(x) = (x+1)^4$

(б) $f(x) = x^2\ln x$

(ц) $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$

(д) $f(x) = (1 + x^2)e^x$

(е) $f(x) = \frac{1}{x+3}$

6.6. Наћи асимптоте графика функције

(а) $f(x) = x + \ln x$

(б) $f(x) = e^{-x^2} + 2$

(ц) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+9}$

(д) $f(x) = \frac{1}{1-e^x}$

(е) $f(x) = \frac{x}{x^2-4x+3}$

(ф) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

6.7. Скицирати график функције

(а) в $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8$

(б) в $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$

(ц) в $f(x) = \frac{e^{-x}}{x-2}$

(д) в $f(x) = \frac{x+2}{1-\ln(x+2)}$

(е) $f(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$

(ф) $f(x) = \sqrt{8+x} - \sqrt{8-x}$

(г) $f(x) = \sin 2x + \cos 2x$

(х) в $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x}$

(и) $f(x) = (x - x^2)e^{-x}$

(ј) $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

(к) $f(x) = \frac{x}{1+e^{-\frac{1}{x}}}$

(л) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

(м) $f(x) = \ln \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

(н) $f(x) = \arcsin \frac{x^2}{\sqrt{2x^4-2x^2+1}}$

(о) $f(x) = (1+x) \ln \frac{x+1}{x+2}$

(п) $f(x) = 1 - e^{2x-x^2}$

7 Неодређени интеграл

7.1. Израчунати интеграле

(а) в $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\,dx$

(б) в $\int (6x^2+8x+3)\,dx$

(ц) в $\int (\sin x - \frac{1}{\sin^2 x})\,dx$

(д) в $\int (5^x + x^5)\,dx$

(е) в $\int (\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2})\,dx$

(ф) в $\int (\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + e^x)\,dx$

7.2. Израчунати интеграле (смена променљиве)

(а) в $\int \frac{dx}{x-a}$

(б) в $\int \frac{dx}{(x-a)^n}$

(ц) в $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

(д) в $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$

(е) в $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$

(ф) в $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$

(г) в $\int \frac{x}{a^2+x^2}\,dx$

(х) в $\int \frac{x^3}{x^8-2}\,dx$

7.3. * Израчунати интеграле (смена променљиве)

(а) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$

(б) $\int \cos^2 2x\,dx$

(ц) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

(д) $\int \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$

(е) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$

7.4. Израчунати интеграле (парцијална интеграција) (а) в $\int x \ln x \, dx$

(б) в $\int x^2 \ln x \, dx$

(ц) в $\int \ln^2 x \, dx$

(д) в $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \, dx$

(е) в $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx$

(ф) в $\int x \sin x \, dx$

(г) в $\int x \cos 3x \, dx$

(х) в $\int e^x \cos x \, dx$

(и) в $\int \arcsin x \, dx$

(ј) в $\int x \arctan x \, dx$

7.5. Израчунати интеграле (парцијална интеграција)

(а) $\int \frac{x}{\sin^2 x} \, dx$

(б) $\int 3^x \cos x \, dx$

(ц) $\int x \sin x \cos x \, dx$

(д) $\int (x^2 - 2x + 5) e^{-x} \, dx$

(е) $\int x^3 e^{-\frac{x}{3}} \, dx$

(ф) $\int \sin(\ln x) \, dx$

(г) $\int \sin 2x e^{3x} \, dx$

(х) $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$

7.6. Израчунати интеграле (рационалне функције)

(а) в $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} \, dx$

(б) в $\int \frac{x}{x^3 - 3x + 2} \, dx$

(ц) $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$

(д) в $\int \frac{dx}{x^3 + 1}$

(е) $\int \frac{dx}{x^4 + 1}$

(ф) $\int \frac{dx}{(x^3 + 1)^2}$

(г) $\int \frac{x^2 + 1}{x^6 + 1} \, dx$

(х) $\int \frac{x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - x}{(x-1)^2(x^2+1)} \, dx$

7.7. Израчунати интеграле (тригонометријске функције)

(а) в $\int \sin^{10} x \, \cos^3 x \, dx$

(б) $\int \sin^4 x \, \cos^2 x \, dx$

(ц) в $\int \sin^5 x \, dx$

(д) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \, \cos^2 x}$

(е) в $\int \frac{dx}{\sin x}$

(ф) $\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$

(г) $\int \frac{3 \sin x + 2 \cos x}{2 \sin x + 3 \cos x} \, dx$

(х) $\int \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} \, dx$

(и) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} \, dx$

(ј) $\int \frac{\cos x}{\sin^4 x} \, dx$

7.8. Израчунати интеграле (неке ирационалне функције)

(а) $\int x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \, dx$

(б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

(ц) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}$

8 Одређени интеграл и примене интеграла

8.1. Израчунати вредност одређених интеграла (а) $\int_0^1 (2x+1)^{50}\,dx$

(б) $\int_0^3 \frac{t\,dt}{t^2+1}$

(ц) $\int_4^1 \sqrt{1+\frac{1}{x}}\frac{dx}{x^2}$

(д) $\int_0^8 |x^2-6x+8|\,dx$

(е) $\int_0^3 x^2e^{-x}\,dx$

(ф) $\int_1^{e^{2\pi}} \sin\ln t\,dt$

(г) $\int_1^3 \sqrt{x+1}\,dx$

(х) $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

(и) $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$

(ј) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

(к) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$

(л) $\int_1^e \ln x\,dx$

8.2. Израчунати површину лика у равни, ограниченог кривама

(а) $y=\sin x,\ y=\cos x,\ x=0,\ x=\frac{\pi}{2}$

(б) $y=x-1,\ y^2=2x+6$

(ц) $y^2=x,\ x-2y=3$

(д) $y=\cos x,\ y=\sin 2x,\ x=\frac{\pi}{2},\ x=\pi$

(е) $y=|x|,\ y=(x+1)^2-7,\ x=-4$

(ф) $y=x^{-1},\ y=x^{-2},\ x=1,\ x=2$

(г) $4x+y^2=0,\ y=2x+4$

(х) $y=x,\ y=x^3$

(и) $y=x^2,\ y=\frac{2}{x^2+1}$

(ј) $y=e^x,\ y=e^{3x},\ x=1$

(к) $x^2+4y^2=4,\ x^2-y^2=\frac{1}{4}$

(л) $x^2+y^2=1,\ y=x^2-1,\ y=-x$

9 Несвојствени интеграл

9.1. Испитати конвергенцију несвојствених интеграла

(а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$

(б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$

(ц) $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x\,dx$

(д) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

9.2. Израчунати вредност несвојствених интеграла

(а) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^3}$

(б) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}$