

① Оредиште дај 1 „1-1“ холоморфно пресликавање $w = f(z)$ којим се:

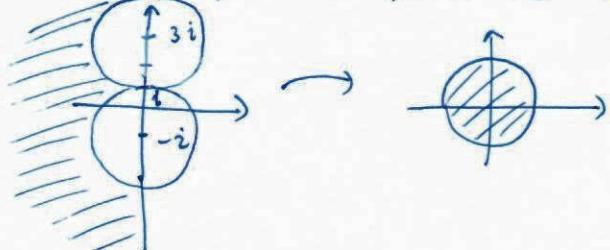
a) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z < 0\}$ пресликава на $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > 0\}$.



b) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < \sqrt{2}, |z+1| < \sqrt{2}\}$ пресликава на $\{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$



c) $\{z \in \mathbb{C} : |z-3i| > 2, |z+i| > 2, \operatorname{Re} z < 0\}$ пресликава на $\{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$



$$a) \begin{array}{c} \text{Diagram of the left half-plane } \operatorname{Re} z < 0 \text{ with a vertical strip shaded with diagonal lines.} \\ \xrightarrow{\omega_1 = iz = e^{i\frac{\pi}{2}}z} \begin{array}{c} \text{Diagram of the upper half-plane } \operatorname{Im} w > 0 \text{ with a vertical strip shaded with diagonal lines.} \\ \xrightarrow{\omega_2 = \pi \cdot \omega_1} \begin{array}{c} \text{Diagram of the unit disk } |w| < 1 \text{ with a vertical strip shaded with diagonal lines.} \end{array} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\omega_3 = e^{\omega_2}} \begin{array}{c} \text{Diagram of the unit disk } |w| < 1 \text{ with a semi-circular arc shaded with diagonal lines.} \\ \xrightarrow{\omega_4 = \Delta(\omega_3)} \begin{array}{c} \text{Diagram of the unit disk } |w| < 1 \text{ with a full circle shaded with diagonal lines.} \end{array} \end{array} \\ \Rightarrow w = f(z) = \Delta(e^{i\pi z}) \end{array}$$

$$b) \begin{array}{c} \text{Diagram of the complex plane with two circles } |z-i| = 1 \text{ and } |z+i| = 1. A vertical strip between them is shaded with diagonal lines.} \\ \xrightarrow{\omega_1 = z+i} \begin{array}{c} \text{Diagram of the complex plane with a circle } |w| = 1. A vertical strip between two points on the real axis is shaded with diagonal lines.} \end{array} \end{array}$$

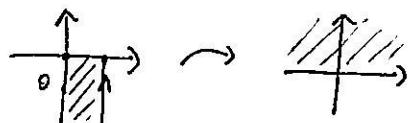
Слика је изврше пребе
сага у односу на
 $w_2 = \frac{1}{\omega_1}$
 $2i \mapsto \frac{1}{-2i} = \frac{1}{2}i$ — пресек правих
пресек кругова

! Једнодно нај је да се
крунинце пресликаву у пребе
да бисмо добили промењену (после чак долазимо до ∞)

\Rightarrow крунинце пребе да прети
кроз центар инверзије

① Оредите даје да је 1 „1-1“ холоморфно пресликавање $w = f(z)$ којим се:

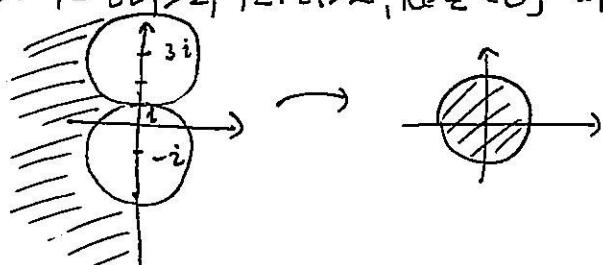
a) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z < 0\}$ пресликава на $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > 0\}$



b) $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < \sqrt{2}, |z+1| < \sqrt{2}\}$ пресликава на $\{|w| < 1\}$



c) $\{z \in \mathbb{C} : |z-3i| > 2, |z+i| > 2, \operatorname{Re} z < 0\}$ пресликава на $\{|w| < 1\}$



d)

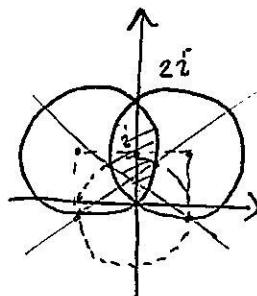
$$w_1 = iz = e^{i\frac{\pi}{2}} z$$

$$w_2 = \pi \cdot w_1$$

$w_3 = e^{w_2}$
 $w_4 = \Delta(w_3)$

$$\Rightarrow w = f(z) = \Delta(e^{iz})$$

e)

$$w_1 = z + i$$


Слика је избаче и рабе
сига је оглочује на
 $w_2 = \frac{1}{w_1}$
 $2i \mapsto \frac{1}{-2i} = \frac{1}{2}i$ — пресек првих
пресек кружнице

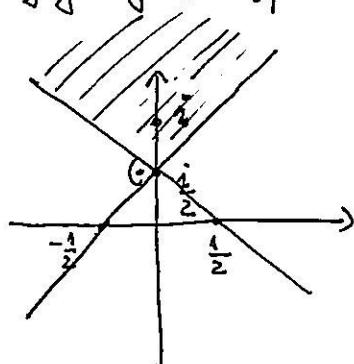
! Једнодно нај је да се
кружнице пресликаву у прве
да бисмо добили променату у неком моменту (досле лако долазимо до \mathbb{D})

\Rightarrow кружнице иду да пролaze
између центара инверзије



* Постоји инверзија која уједно изменјује криве, а кривине су једнаке, што се добијаје ако се нормале и јони су симетричне у односу на једну осу (јер су кругови једни симетрични, а једна осма је симетрија на овој инверзији)

$$w_2 = \frac{1}{\bar{w}_1}$$

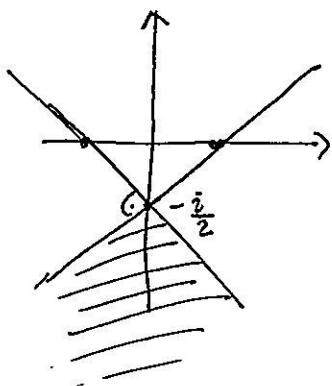


односу на једну осу (јер су кругови једни симетрични, а једна осма је симетрија на овој инверзији)

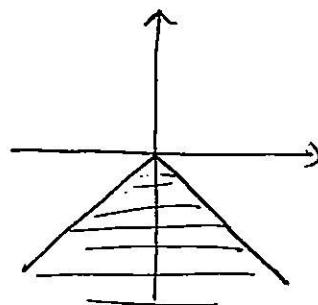
$$i \mapsto \frac{1}{-i} = i$$

\Rightarrow смисла је осенчени десо

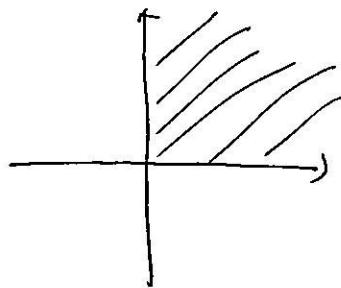
$$w_3 = \bar{w}_2$$



$$w_3 = w_2 + \frac{i}{2}$$



$$w_5 = w_4 \cdot e^{i \frac{3\pi}{4}}$$



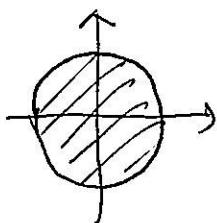
$$w_6 = w_5^2$$

$$z = r e^{i\theta}, \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$$

$$z^2 = r^2 e^{i2\theta}, 2\theta \in (0, \pi)$$

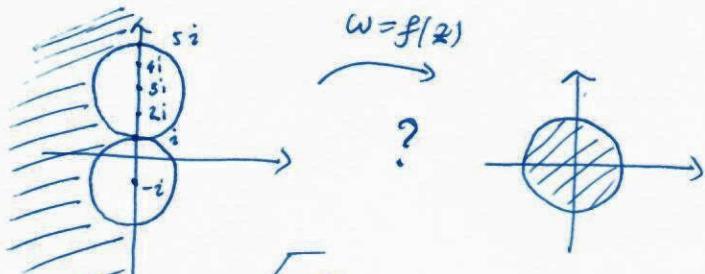
$$w_7 = \frac{w_6 - i}{w_6 + i}$$

(НУП.)



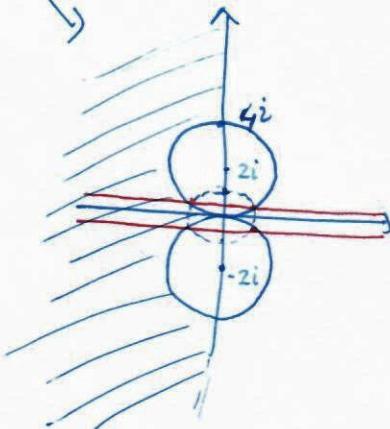
$$\begin{aligned}
 w &= f(z) = \frac{w_5^2 - i}{w_5^2 + i} = \frac{w_4^2 e^{i \frac{3\pi}{2}} - i}{w_4^2 e^{i \frac{3\pi}{2}} + i} = \frac{(w_3 + \frac{i}{2})^2 e^{i \frac{3\pi}{2}} - i}{(w_3 + \frac{i}{2})^2 e^{i \frac{3\pi}{2}} + i} \\
 &= \frac{\left(\frac{1}{z+i} + \frac{i}{2}\right)^2 e^{i \frac{3\pi}{2}} - i}{\left(\frac{1}{z+i} + \frac{i}{2}\right)^2 e^{i \frac{3\pi}{2}} + i} = \frac{\left(\frac{1}{z+i} + \frac{i}{2}\right)^2 \cdot (-i) - i}{\left(\frac{1}{z+i} + \frac{i}{2}\right)^2 \cdot (-i) + i} = \frac{\left(\frac{1}{z+i} + \frac{i}{2}\right)^2 + 1}{\left(\frac{1}{z+i} + \frac{i}{2}\right)^2 - 1}
 \end{aligned}$$

b)



Одјечи ћемо да се крућути сликаву на прве? трансформација најпре се за $-i$

$$\omega_1 = z - i$$



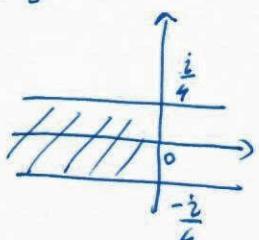
$$\omega_2 = \frac{1}{\bar{\omega}_1}$$

$$4i \mapsto \frac{1}{-4i} = \frac{1}{4}i$$

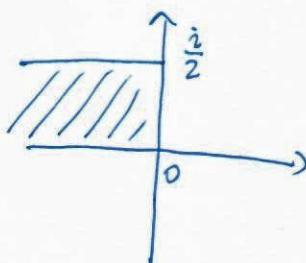
$$-4i \mapsto -\frac{1}{4}i$$

$$-1 \mapsto -1$$

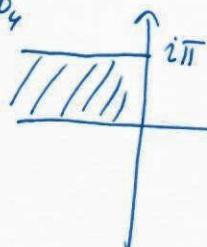
$$\omega_3 = \bar{\omega}_2$$



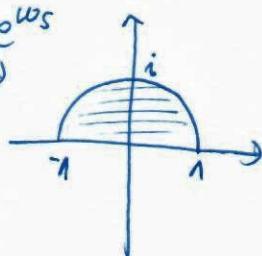
$$\omega_4 = \omega_3 + \frac{i}{4}$$



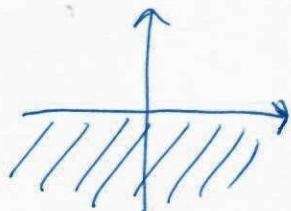
$$\omega_5 = 2\pi \cdot \omega_4$$



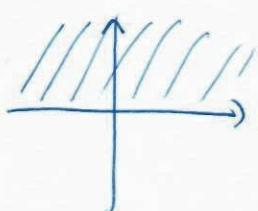
$$\omega_6 = e^{\omega_5}$$



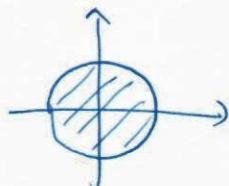
$$\omega_7 = \Delta / \omega_6$$



$$\omega_8 = -\omega_7$$



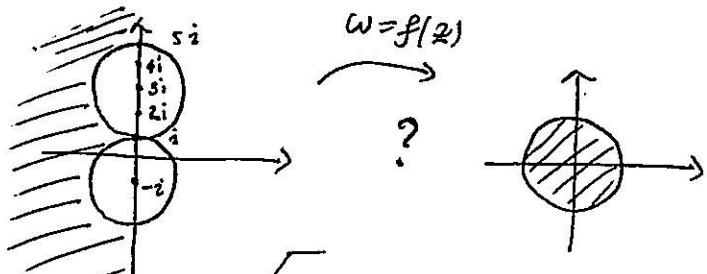
$$\omega_9 = \frac{\omega_8 - i}{\omega_8 + i}$$



$$\omega = f(z) = \frac{-\Delta / \omega_6 - i}{-\Delta / \omega_6 + i} = \frac{-\Delta (e^{\omega_5}) - i}{-\Delta (e^{\omega_5}) + i} = \frac{-\Delta (e^{2\pi(\frac{1}{z-i} + \frac{i}{4})}) - i}{-\Delta (e^{2\pi(\frac{1}{z-i} + \frac{i}{4})}) + i}$$

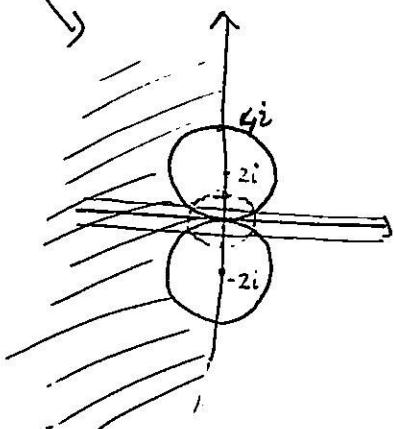
$$f(z) = \frac{\Delta (e^{2\pi(\frac{1}{z-i} + \frac{i}{4})}) + i}{\Delta (e^{2\pi(\frac{1}{z-i} + \frac{i}{4})}) - i}$$

b)



Очеви телеса да се кръстят съкрай на пръбче?
трансформация нарича съв за $-i$

$$w_1 = z - i$$



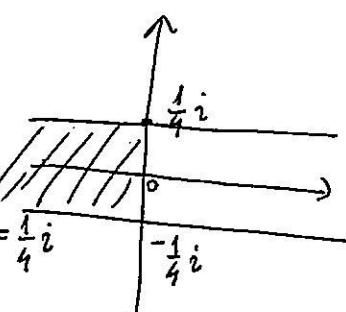
$$w_2 = \frac{1}{w_1}$$

$$4i \mapsto \frac{1}{-4i} = \frac{1}{4}i$$

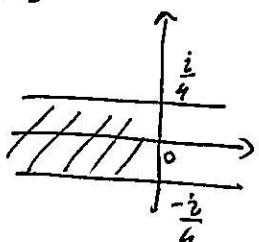
$$-4i \mapsto -\frac{1}{4}i$$

$$-1 \mapsto -1$$

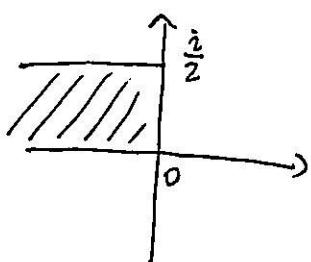
$$w_3 = \bar{w}_2$$



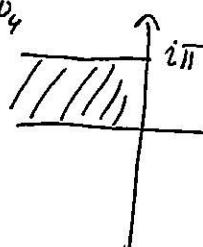
$$w_3 = \bar{w}_2$$



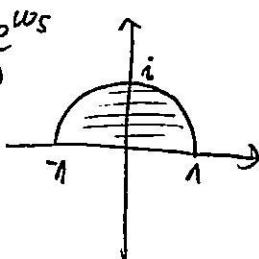
$$w_4 = w_3 + \frac{i}{4}$$



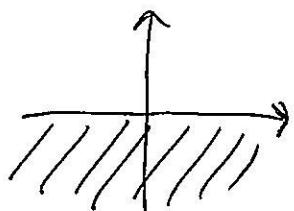
$$w_5 = 2\pi \cdot w_4$$



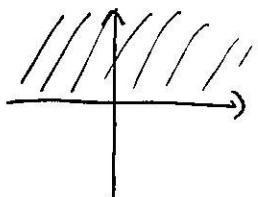
$$w_6 = e^{w_5}$$



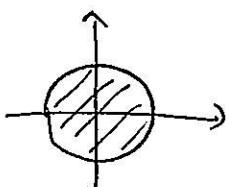
$$w_7 = \Delta / w_6$$



$$w_8 = -w_7$$



$$w_9 = \frac{w_8 - i}{w_8 + i}$$



$$\omega = f(z) = \frac{-\Delta(w_6) - i}{-\Delta(w_6) + i} = \frac{-\Delta(e^{w_5}) - i}{-\Delta(e^{w_5}) + i} = \frac{-\Delta(e^{2\pi(\frac{1}{z-i} + \frac{i}{4})}) - i}{-\Delta(e^{2\pi(\frac{1}{z-i} + \frac{i}{4})}) + i}$$

$$f(z) = \frac{\Delta(e^{2\pi(\frac{1}{z-i} + \frac{i}{4})}) + i}{\Delta(e^{2\pi(\frac{1}{z-i} + \frac{i}{4})}) - i}$$