деф: Ω области

Нека је $f:\Omega\to\mathbb{C}$ холоморфна функција. Кажемо да је f конформно у тачки $z_0\in\Omega$ ако је $f'(z_0)\neq 0$, односно конформно у Ω ако је конформно у свакој тачки области Ω.

Теорема1: Нека је $f:\Omega\to\mathbb{C}$ аналитичка. Тада је f локално 1-1 у Ω акко је $f'(z)\neq 0$, $\forall z\in\Omega$.

пример: $f(z)=e^z$ холоморфна на $\mathbb{C}$

$f'(z)=e^z\neq 0\ \forall z\in\mathbb{C} \Rightarrow f$ је конформно на $\mathbb{C}$

На основу теореме је f локално 1-1. (свака тачка има околину на којој је f 1-1)

Али, f није 1-1 у $\mathbb{C}$ јер:

$$f(z+2k\pi i)=e^{z+2k\pi i}=e^z=f(z),\quad z\in\mathbb{C},\ k\in\mathbb{Z}.$$

* билинеарно пресликавање $B(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc\neq 0$ $(a,b,c,d\in\mathbb{C})$

$$B'(z)=\frac{a(cz+d)-c(az+b)}{(cz+d)^2}=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}\neq 0 \quad \text{за } z\neq\frac{-d}{c}$$

$\Rightarrow B$ је конформно на $\mathbb{C}\setminus\left\{\frac{-d}{c}\right\}$

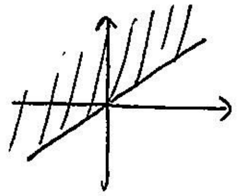
Теорема2: Конформна пресликавања чувају углове између кривих.

Дакле, билинеарно пресликавање чува углове између кривих.

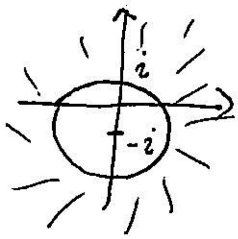
* За билинеарна пресликавања важи принцип кореспонденције граница, тј. граница неке области Ω се слика на границу $f(\Omega)$.

$$\left(f(\partial\Omega)=\partial f(\Omega)\right)$$

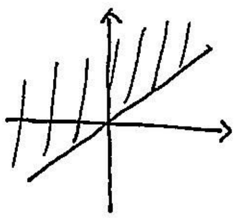
① Одредити бар 1 билинеарно пресликавање којим се област $\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z > \operatorname{Re} z\}$ пресликава на област $\{w\in\mathbb{C} : |w+i|>2\}$.



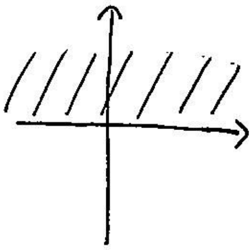
$\xrightarrow{\;w=\phi(z)\;}$?



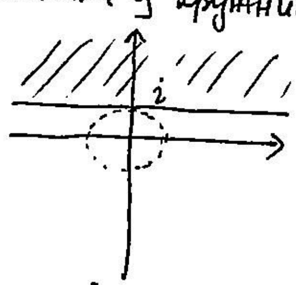
(граница се слика на границу — у неком моменту ћемо искористити инверзију да би се права сликала у кружницу)



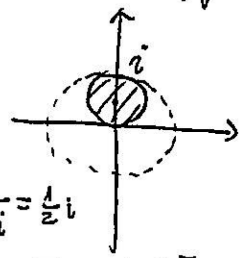
$\xrightarrow{\;w_1 = z\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}\;}$ ротација за $\frac{\pi}{4}$ у негат. смеру



$\xrightarrow{\;w_2 = w_1 + i\;}$



$\xrightarrow{\;w_3 = \frac{1}{\overline{w_2}}\;}$

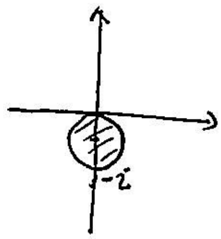


$2i \longmapsto \frac{1}{-2i} = \frac{1}{2}i$

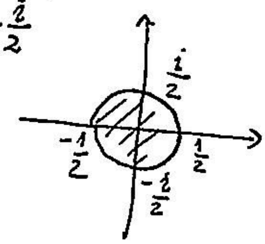
слика је унутрашњост кружнице тј.

$\{w_3\in\mathbb{C} : |w_3 - \frac{i}{2}| < \frac{1}{2}\}$

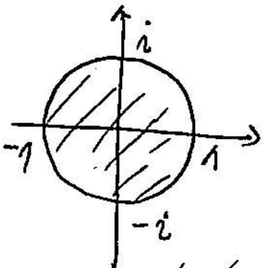
$\xrightarrow{\;w_4 = \overline{w_3}\;}$



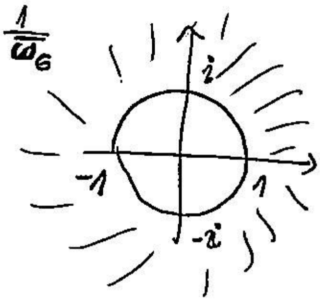
$\xrightarrow{\;w_5 = w_4 + \frac{i}{2}\;}$



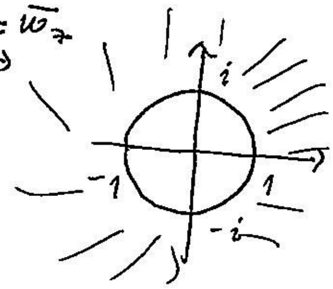
$\xrightarrow{\;w_6 = 2\cdot w_5\;}$



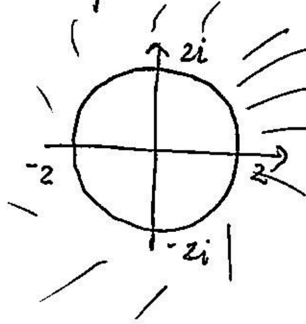
$\xrightarrow{\;w_7 = \frac{1}{\overline{w_6}}\;}$



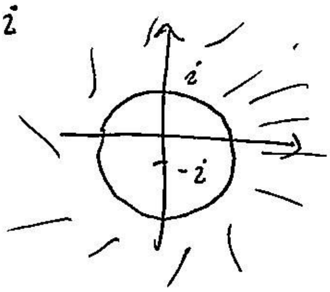
$\xrightarrow{\;w_8 = \overline{w_7}\;}$



$\xrightarrow{\;w_9 = 2\cdot w_8\;}$



$\xrightarrow{\;w_{10} = w_9 - i\;}$



$$w = w_{10} = w_9 - i = 2w_8 - i = 2\cdot\frac{1}{w_6} - i$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2w_5} - i = \frac{1}{w_4+\frac{i}{2}} - i = \frac{1}{\frac{1}{w_2}+\frac{i}{2}} - i$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{w_1+i}+\frac{i}{2}} - i$$

$$w = \frac{1}{\frac{1}{ze^{-i\frac{\pi}{4}}+i} + \frac{i}{2}} - i = \frac{1}{\frac{2+i(ze^{-i\frac{\pi}{4}}+i)}{2(ze^{-i\frac{\pi}{4}}+i)}} - i$$

$$= \frac{2(ze^{-i\frac{\pi}{4}}+i)}{2+i(ze^{-i\frac{\pi}{4}}+i)} - i = \frac{2\left(z\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+i\right) - i\left(2+i\left(z\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+i\right)\right)}{2+i\left(z\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+i\right)}$$

$$= \frac{2z\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)+\cancel{2i}-\cancel{2i}+z\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)+i}{2+i\cdot z\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)-1}$$

$$= \frac{z\sqrt{2}(1-i)+\frac{z\sqrt{2}}{2}(1-i)+i}{1+z\frac{\sqrt{2}}{2}(i+1)} \quad \begin{matrix} /\cdot 2 \\ /\cdot 2 \end{matrix}$$

$$= \frac{2z\sqrt{2}(1-i)+z\sqrt{2}(1-i)+2i}{2+z\sqrt{2}(i+1)} = \frac{3z\sqrt{2}(1-i)+2i}{z\sqrt{2}(1+i)+2}$$

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{1^2-i^2} = \frac{\cancel{1}+2i+\cancel{i^2}}{1+1} = i$$

$$= \frac{3z\sqrt{2}+2\cdot\frac{i}{1-i}}{z\sqrt{2}\cdot i+\frac{2}{1-i}}$$

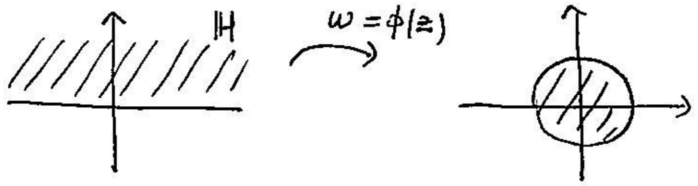
$$\frac{2}{1-i} = \frac{2}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i} = \frac{2(1+i)}{2} = 1+i$$

$$= \frac{3z\sqrt{2}+i-1}{z\sqrt{2}\cdot i+1+i}$$

$$\frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{1^2-i^2} = \frac{i-1}{2}$$

$$\boxed{w = \phi(z) = \frac{3z\sqrt{2}+i-1}{z\sqrt{2}\cdot i+1+i}}$$

② Одредити сва билинеарна пресликавања која $\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z>0\}$ пресликавају на $\mathbb{D}=\{w\in\mathbb{C} : |w|<1\}$.



$$\phi(z)=\frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc\neq 0$$

$\phi(\mathbb{H})=\mathbb{D} \Rightarrow \phi(\partial\mathbb{H})=\partial\mathbb{D}$ (принцип кореспонденције границе)

ϕ је „на" $\Rightarrow (\exists z_0\in\mathbb{H})\ \phi(z_0)=0 \Rightarrow az_0+b=0 \Rightarrow b=-a\cdot z_0$

Пошто се симетричне тачке сликају у симетричне, то је

$\phi(\bar{z}_0)=\infty \Rightarrow c\bar{z}_0+d=0 \Rightarrow d=-c\cdot\bar{z}_0$

$$\phi(z)=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{az-az_0}{cz-c\bar{z}_0}=\frac{a}{c}\cdot\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}, \quad \frac{a}{c}=A$$

$1\in\partial\mathbb{H} \Rightarrow \phi(1)\in\partial\mathbb{D} \Rightarrow |\phi(1)|=1$

тј. $\left|A\cdot\frac{1-z_0}{1-\bar{z}_0}\right|=1$

Пошто је $|1-z_0|=|\overline{1-z_0}|=|1-\bar{z}_0|$, то је $|A|=1$.

Дакле, $A=e^{i\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

$$\boxed{\phi(z)=e^{i\alpha}\cdot\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0} \quad \alpha\in\mathbb{R},\ z_0\in\mathbb{H}}$$

Остаје да се покаже да добијено пресликавање заиста слика $\mathbb{H}$ на $\mathbb{D}$.

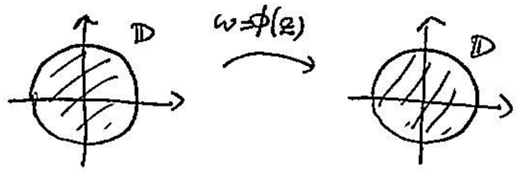
$x\in\partial\mathbb{H} \Rightarrow |\phi(x)|=\left|\frac{x-z_0}{x-\bar{z}_0}\right|=\left|\frac{x-z_0}{\overline{x-z_0}}\right|=1 \Rightarrow \phi(\partial\mathbb{H})\subseteq\partial\mathbb{D}$

Пошто билинеарно пресликавање слика праве на праве или кружнице, то је $\phi(\partial\mathbb{H})=\partial\mathbb{D}$.

ϕ непрекидно, повезан скуп слика у повезан

$\Rightarrow \phi(\mathbb{H})=\mathbb{D}$ или $\phi(\mathbb{H})=\overline{\mathbb{D}}^c$. Због $\phi(z_0)=0$, $z_0\in\mathbb{H}$, $0\in\mathbb{D} \Rightarrow \boxed{\phi(\mathbb{H})=\mathbb{D}}$

③ Одредити сва билинеарна пресликавања тд. пресликавају $\mathbb{D}$ на $\mathbb{D}$.



$$\phi(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

$\phi(\mathbb{D})=\mathbb{D} \Rightarrow \phi(\partial\mathbb{D})=\partial\mathbb{D}$ (принцип кореспонденције границе)

ϕ је „на" $\Rightarrow (\exists z_0\in\mathbb{D})\ \phi(z_0)=0$

Пошто се симетричне тачке сликају у симетричне, то је $\phi\left(\frac{1}{\bar{z}_0}\right)=\infty$.

$$\frac{az_0+b}{cz_0+d}=0 \Rightarrow az_0+b=0 \Rightarrow b=-az_0$$

$$\frac{a\cdot\frac{1}{\bar{z}_0}+b}{c\cdot\frac{1}{\bar{z}_0}+d}=\infty \Rightarrow \frac{c}{\bar{z}_0}+d=0 \Rightarrow d=\frac{-c}{\bar{z}_0}$$

$$\phi(z)=\frac{az-az_0}{cz-\frac{c}{\bar{z}_0}}=\frac{a(z-z_0)}{c z\bar{z}_0-c}\cdot\bar{z}_0=\frac{a}{c}\cdot\frac{z-z_0}{z\bar{z}_0-1}\cdot\bar{z}_0$$

$$\phi(z)=\frac{-\bar{z}_0 a}{c}\cdot\frac{z-z_0}{1-z\bar{z}_0}\quad,\ A=\frac{-\bar{z}_0\cdot a}{c}$$

$$1\in\partial\mathbb{D}\Rightarrow\phi(1)\in\partial\mathbb{D}\Rightarrow|\phi(1)|=1\Rightarrow\left|\frac{A(1-z_0)}{1-\bar{z}_0}\right|=1$$

$$\Rightarrow|A|\cdot\left|\frac{1-z_0}{1-\bar{z}_0}\right|=1\Rightarrow|A|=1 \text{ тј. } A=e^{i\alpha},\ \alpha\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow\boxed{\phi(z)=e^{i\alpha}\cdot\frac{z-z_0}{1-z\bar{z}_0}\quad,\ z_0\in\mathbb{D},\ \alpha\in\mathbb{R}}$$

Да ли је ово заиста тражено пресликавање?

$$z=e^{it}\in\partial\mathbb{D}\Rightarrow\phi(e^{it})=e^{i\alpha}\frac{e^{it}-z_0}{1-e^{it}\bar{z}_0}$$

$$\Rightarrow|\phi(e^{it})|=\left|\frac{e^{it}-z_0}{1-e^{it}\bar{z}_0}\right|=\left|\frac{e^{-it}(e^{it}-z_0)}{e^{-it}-\bar{z}_0}\right|=\left|\frac{e^{it}-z_0}{\overline{e^{it}-z_0}}\right|=1\Rightarrow\phi(e^{it})\in\partial\mathbb{D}$$

кружнице се сликају на праве или кружнице

$$\phi(\partial\mathbb{D}) \subset \partial\mathbb{D} \quad \Rightarrow \quad \phi(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$$

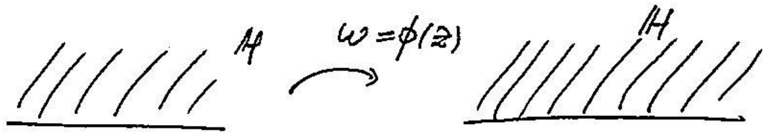
ϕ непрекидно, повезан скуп слика у повезан

$$\Rightarrow \quad \phi(\mathbb{D}) = \mathbb{D} \text{ или } \phi(\mathbb{D}) = \overline{\mathbb{D}}^c$$

Пошто је $z_0 \in \mathbb{D}$, а $\phi(z_0) = 0 \in \mathbb{D}$

то је $\phi(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

(4) Одредити сва билинеарна пресликавања која $\mathbb{H}$ пресликавају на $\mathbb{H}$.



$$\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc \neq 0 \qquad \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$$

$$\phi(\mathbb{H}) = \mathbb{H} \overset{\text{ПКГ}}{\Longrightarrow} \phi(\partial\mathbb{H}) = \partial\mathbb{H}$$

$0, 1, \infty \in \partial\mathbb{H}$ (у $\overline{\mathbb{C}}$)

ϕ „на" $\Rightarrow (\exists z_1, z_2, z_3 \in \partial\mathbb{H})$ $\phi(z_1) = 0$

$\phi(z_2) = 1$

$\phi(z_3) = \infty$

$$\phi(z) = \frac{z-z_1}{z-z_3} \cdot \frac{z_2-z_3}{z_2-z_1} = \frac{az+b}{cz+d}$$

$$\Rightarrow a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

$$z \in \mathbb{H} \Rightarrow \operatorname{Im} z > 0 \Rightarrow \underbrace{\phi(z)}_{w} \in \mathbb{H}, \ \operatorname{Im}\phi(z) > 0$$

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)\overline{(cz+d)}}{|cz+d|^2} = \frac{(az+b)(\bar{c}\bar{z}+\bar{d})}{|cz+d|^2}$$

$$= \frac{\overbrace{a\bar{c}}^{\in\mathbb{R}}|z|^2 + bc\bar{z} + a\bar{d}z + \overbrace{b\bar{d}}^{\in\mathbb{R}}}{|cz+d|^2}$$

$(d = \bar{d},\ a = \bar{a},\ b = \bar{b},\ c = \bar{c}$ јер $a, b, c, d \in \mathbb{R})$

$$\Rightarrow \operatorname{Im} w = \operatorname{Im}\left(\frac{bc\bar{z} + adz}{|cz+d|^2}\right)$$

За $z = x + iy$ је $bc\bar{z} + adz = bc\cdot(x - iy) + ad(x + iy)$

$$= bcx + adx + i(-bcy + ady)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}(bc\bar{z} + adz) = y(ad - bc) = \underbrace{\operatorname{Im} z}_{>0}\cdot(ad - bc)$$

$\Rightarrow$ $\operatorname{Im} w > 0$ за $ad - bc > 0$

$$\boxed{\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \ a, b, c, d \in \mathbb{R}, \ ad - bc > 0}$$

Да ли је ово заиста тражено пресликавање?

$x \in \partial\mathbb{H} \Rightarrow \phi(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d} \in \mathbb{R}$ тј. $\phi(x) \in \partial\mathbb{H} \Rightarrow \phi(\partial\mathbb{H}) \subseteq \partial\mathbb{H}$

$\Rightarrow \phi(\partial\mathbb{H}) = \partial\mathbb{H}$

праве се сликају у праве или кружнице

ϕ непрекидно, повезан скуп слика на повезан

$\Rightarrow \phi(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$ или $\phi(\mathbb{H}) = \overline{\mathbb{H}}^c$

За $z \in \mathbb{H}$ је $\operatorname{Im} z > 0$, а $w = \phi(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ је тд.

$w \in \mathbb{H}$ јер је $\operatorname{Im} w = \underbrace{\operatorname{Im} z}_{>0}\cdot\underbrace{(ad - bc)}_{>0} > 0$, па је $\phi(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$.