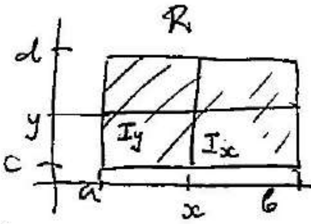
Напомена: Геометријска и аналитичка деф. су еквивалентне. (предавања)

У геометријској деф уместо квадрилатерала се могу узети и прстен домени. (доказује се еквив.)

Подсетимо се: ACL

* f је апсолутно непрекидна на интервалу I ако за свако $\varepsilon>0$ постоји $\delta>0$ тд. је $\sum|f(b_i)-f(a_i)|<\varepsilon$ за сваки коначан низ непресецајућих интервала (a_i,b_i) тд. $[a_i,b_i]\subseteq I$ и за које важи $\sum(b_i-a_i)<\delta$.
* f је апсолутно непрекидно на линијама (ACL) у G ако је за сваки правоугаоник $R=\{x+iy : a<x<b,\ c<y<d\}$ $\bar{R}\subseteq G$, f апсолутно непр као ф-ја по x на скоро свим сегментима $I_y=\{x+iy \mid a<x<b\}$ и као ф-ја по y на скоро свим сегментима $I_x=\{x+iy \mid c<y<d\}$.



* Сингуларна функција: ф-ја ограничене варијације тд. има извод 0 у скоро свим тачкама интервала I (не може бити AC и неконстантна сингуларна ф-ја !)

(јер за AC ф-ју важи $f(b)-f(a)=\int_a^b f'(x)\,dx$)

Канторов скуп:

(p_n) низ из $(0,1)$

из средине $[0,1]$ избришемо отворен интервал I_{11} дужине p_1

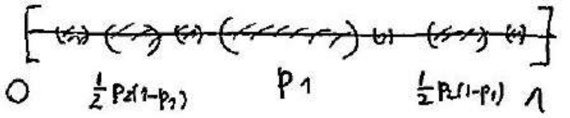
из средина преостала два интервала бришемо интервале дужина $\frac{1}{2}\cdot p_2(1-p_1)$ I_{21} и I_{22}

⋮

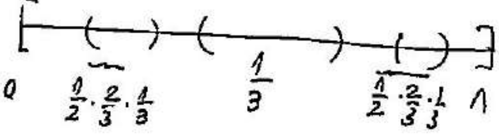
У n-том кораку из средина 2^{n-1} интервала бришемо отворене интервале дужина $\frac{1}{2^{n-1}}\cdot p_n(1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_{n-1})$ $I_{n1}, I_{n2}, \dots I_{nk}, \dots I_{n2^{n-1}}$

Канторов скуп $E(p_1,p_2,\dots) := I \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{nk}$

(за $p_n=\frac{1}{3}$ нпр I_{11} дужине $\frac{1}{3}$ … $I_{n1},\dots I_{n2^{n-1}}$ су дужина
I_{21}, I_{22} дужина $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}$ $\quad \frac{1}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$)



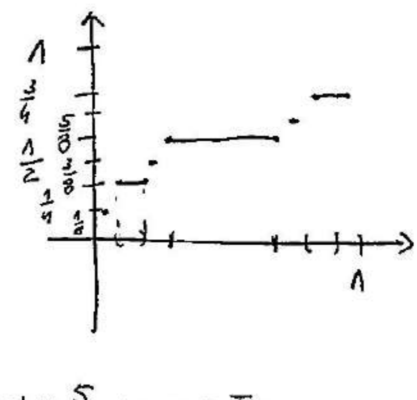
$p_n = \frac{1}{3}$:



$$\ell(E) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \ell(I_{nk}) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} p_n(1-p_1)\dots(1-p_{n-1})$$
$$= 1 - (p_1 + p_2(1-p_1) + p_3(1-p_1)(1-p_2) + \dots + p_n(1-p_1)\cdot(1-p_{n-1}) + \dots)$$
$$= 1 - p_1 - p_2(1-p_1) - (p_3(1-p_1)(1-p_2) + \dots)$$
$$= (1-p_1)(1-p_2) - (p_3(1-p_1)(1-p_2) + \dots)$$
$$\vdots$$
$$= (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)\dots(1-p_n)\dots$$
$$= \prod_{n=1}^{\infty}(1-p_n)$$

прецизније:
$$S_N = 1 - \sum_{n=1}^{N} p_n(1-p_1)\dots(1-p_{n-1}) = 1 - p_1 - p_2(1-p_1) - p_3(1-p_1)(1-p_2) - \dots - p_N(1-p_1)\dots(1-p_{N-1})$$
$$= (1-p_2)(1-p_1) - p_3(1-p_1)(1-p_2) - \dots - p_N(1-p_1)\dots(1-p_{N-1})$$
$$= \dots = (1-p_1)(1-p_2)\dots(1-p_N)$$
$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} S_N = \prod_{n=1}^{\infty}(1-p_n)$$

за $p_n = \frac{1}{3}$ је $\ell(E) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$



Дефинишемо функцију $g(x) = \frac{2k-1}{2^n}$ за $x \in I_{nk}$

$g(x) = \frac{1}{2}$ за $x \in I_{11}$

$g(x) = \frac{1}{4}$ за $x \in I_{21}$, $g(x) = \frac{3}{4}$ за $x \in I_{22}$

$g(x) = \frac{1}{8}$ за $x \in I_{31}$, $g(x) = \frac{3}{8}$ за $x \in I_{32}$ и $g(x) = \frac{5}{8}$ за $x \in I_{33}$

...

g је неопадајућа на $[0,1]$, вредности су јој густе у $[0,1]$ } због

За произвољно $x \in I$ дефинишемо $f(x) = \lim_{t\to x} g(t)$ (постоји!)

f је непрекидна фја!

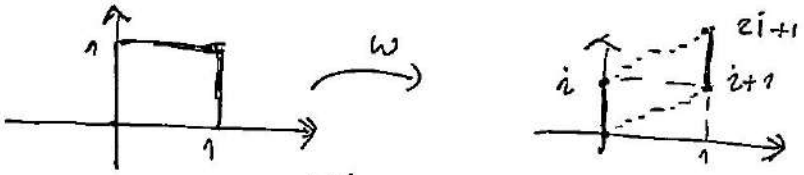
f је константна на I_{nk}, па је $f'(x) = 0$ за све $x \in I \setminus E$

За $p_n = \frac{1}{3}$ је $\ell(E) = 0$, па је тада f сингуларна фја!

f називамо Канторова фја

① Нека је f Канторова функција и $\omega(z) = z + i\cdot f(x)$, $z = x+iy$.

а) Показати да је ω хомеоморфизам квадрата $Q = [0,1]\times[0,1]$ на слику.



$$\omega(z) = z + if(x) = x + i(y+f(x)) \quad z = x+iy$$

ω је непрекидна (јер је f непр. и 1 је непрекидна)

ω 1–1 : $\omega(z_1)=\omega(z_2) \Rightarrow x_1 + i(y_1+f(x_1)) = x_2 + i(y_2+f(x_2))$

$\Rightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 + f(x_1) = y_2 + f(x_2)$

$\Rightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$

$\Rightarrow z_1 = z_2$

ω^{-1} ?

$$\omega(z) = z + i f(x) = Z = X + iY$$

$$X = x,\ Y = y + f(x)$$

$$x = X,\ Y = y + f(x) \Rightarrow y = Y - f(X)$$

$$\Rightarrow \omega^{-1}(Z) = X + i\cdot(Y - f(X))$$

тј. $\omega^{-1}(z) = x + i(y - f(x))$

ω^{-1} је такође непрекидно!

(ω додаје f по y оси, ω^{-1} одузима f по y оси)

$\Rightarrow \omega$ јесте хомеоморфизам Q на $\omega(Q)$.

б) Показати да је $\omega_{\bar z} = 0$ скоро свуда на Q.

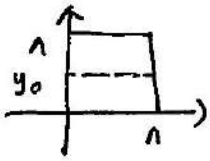
$\omega_{\bar z} = \frac{1}{2}(\omega_x + i\omega_y)$ $\quad \omega_x = 1 + if'(x)$ за скоро све $x \in [0,1]$

$\omega_x = 1$ за скоро све $x \in [0,1]$

$\omega_y = i$ за све $y \in [0,1]$

$\Rightarrow \omega_{\bar z} = \frac{1}{2}(1 + i^2) = 0$ за скоро све $z \in Q$

в) Показати да ω не задовољава услов ACL.



$y_0 \in [0,1]$ фиксиран

(a_i, b_i) низ непресецајућих интервала на дужи

$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = y_0 \ , 0 < \operatorname{Re} z < 1\} = L_{y_0}$

$b_i = b_i' + i y_0 \ , \ b_i' \in (0,1)$

$a_i = a_i' + i y_0 \ , \ a_i' \in (0,1)$

$$\omega(b_i) - \omega(a_i) = b_i + i f(b_i') - a_i - i f(a_i')$$
$$= b_i' - a_i' + i(f(b_i') - f(a_i'))$$

Пошто f није AC на $[0,1]$, то ни ω неће бити ACL, јер неће бити AC ни на једној дужи L_y!

$$|\omega(b_i) - \omega(a_i)|^2 = |b_i' - a_i'|^2 + |f(b_i) - f(a_i)|^2$$

(a_i', b_i') је низ непресец. интервала на $[0,1]$

$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0) \ \ \sum (b_i' - a_i') < \delta$

и $\sum |f(b_i') - f(a_i')| \geq \varepsilon$

итд.

Дакле, пресликавање ω није квазиконформно!

Приметимо да је рестрикција фје ω на сваки правоугаоник $R_{n,k} = \{x+iy : x\in I_{nk},\ 0<y<1\}$ транслација.

$\cup R_{nk}$ садржи скоро све тачке из Q

$$D_f(z) = (|\omega_z| + |\omega_{\bar z}|)\cdot\frac{1}{|\omega_z|-|\omega_{\bar z}|} = 1 \quad \text{за скоро све } z\in Q$$

тј. D_f је скоро свуда ограничено.

Али ω није квазиконформно, јер није ACL!

Рентелове неједнакости

Q квадрилатерал

$$s_a = s_a(Q) = \inf_{C\in\mathcal{C}_a} \ell(C), \quad s_b = s_b(Q) = \inf_{C\in\mathcal{C}_b} \ell(C)$$

$\mathcal{C}_a$ фамилија отворених Жорданових лукова који спајају a стране квадр. Q (унутар Q)

$\mathcal{C}_b$ – спајају b стране (унутар Q)

$M(Q)$ модул квадрилатерала

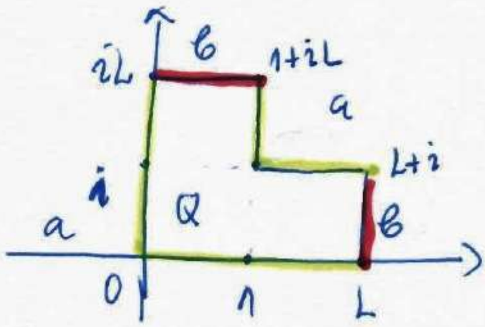
$$\frac{s_b(Q)^2}{m(Q)} \le M(Q) \le \frac{m(Q)}{s_a(Q)^2}$$

= важи ако је Q правоугаоник

$$m(Q) = \iint_Q d\sigma, \quad \ell(C) = \int_C |dz|$$

Примери:

1) $Q = Q(L+i,\ 1+iL,\ iL,\ L)$, Q на скици, $L>1$



$s_a = 1$

$s_b = L-1 + L-1 = 2L-2$

$m(Q) = 1 + 2\cdot(L-1) = 2L-1$

Ренгелова неједнакост:

зелено – a стране
црвено – b стране

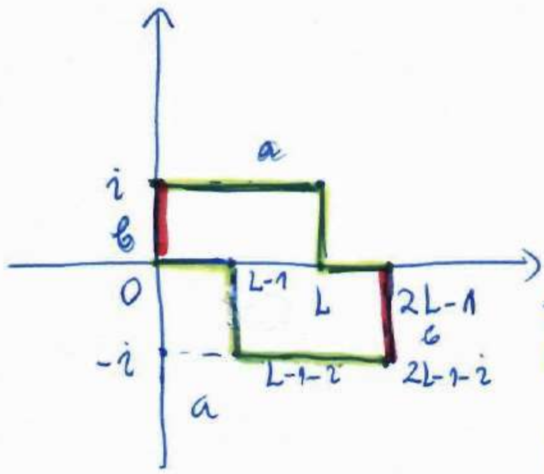
$$\frac{(2L-2)^2}{2L-1} \le M(Q) \le \frac{2L-1}{1}$$

$$\frac{(2L-2)^2}{(2L-1)2L} \le \frac{M(Q)}{2L} \le \frac{2L-1}{2L} \quad \Big/ \lim_{L\to\infty}$$

$$\Rightarrow \lim_{L\to\infty} \frac{M(Q)}{2L} = 1$$

3) $L > 1$ угловни тј. темена $0, L-1, L-1-i, 2L-1-i, 2L-1, L, L+i, i$

$$Q = Q(2L-1, i, 0, 2L-1-i)$$



$$s_a = 1$$

$$s_b = 2L-1$$

$$m(Q) = L\cdot 1 + L \cdot 1 = 2L$$

$$\frac{s_b(Q)^2}{m(Q)} \leq M(Q) \leq \frac{m(Q)}{s_a(Q)^2} \quad (\text{Ренiск})$$

$$\frac{(2L-1)^2}{2L} \leq M(Q) \leq \frac{2L}{1}$$

$$\frac{(2L-1)^2}{2L\cdot 2L} \leq \frac{M(Q)}{2L} \leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{L\to\infty} \frac{M(Q)}{2L} = 1$$