Теорија интереса

Ознаке:

P - почетни новац

t - временски период

r - каматна стопа на годишњем нивоу (изражава се у процентима)

$A = A(t)$ - новац добијен након времена t

Прост каматни рачун:

Камату (интерес) код простог каматног рачуна обрачунавамо једном годишње.

$r \cdot P$ је камата након првог обрачуна

$A(1) = P + r \cdot P = (1+r) \cdot P$ новац добијен након 1 године

$r \cdot A(1)$ је камата након другог обрачуна

$A(2) = A(1) + r \cdot A(1) = (1+r) \cdot A(1) = (1+r)^2 \cdot P$ новац добијен након 2 године

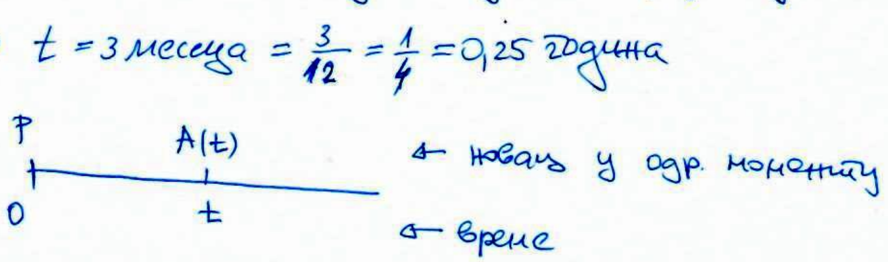
Настављајући поступак добили бисмо

$\boxed{A(t) = (1+r)^t \cdot P}$ новац добијен након временског периода од t година

↑
ОСНОВНА ФОРМУЛА
ПРОСТОГ КАМАТНОГ РАЧУНА

Ову формулу користимо и кад t није цео број година.

Нпр. ако је $t = 3$ месеца $= \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0{,}25$ година



Сложен каматни рачун:

Камату код сложеног каматног рачуна обрачунавамо n пута годишње $(n \in \mathbb{N})$ у једнаким временским интервалима (ако другачије није наглашено).

за $n=1$: постаје прост каматни рачун

за $n=12$: камата се обрачунава сваког месеца – сложен каматни рачун са месечним обрачуном

за $n=3$: камата се обрачунава на 4 месеца

$\frac{r}{n}$ је каматна стопа за један од n интервала обрачуна (ако временски интервали нису исти, почетну (годишњу) каматну стопу r делимо на делове сразмерне величини тих интервала)

$\frac{r}{n} \cdot P$ је камата након првог обрачуна

$A\left(\frac{1}{n}\right) = P + \frac{r}{n} \cdot P = \left(1+\frac{r}{n}\right) \cdot P$ новац након првог обрачуна

$\frac{r}{n} \cdot A\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{r}{n}\left(1+\frac{r}{n}\right) \cdot P$ камата након другог обрачуна

$A\left(\frac{2}{n}\right) = A\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{r}{n} \cdot A\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{r}{n}\right) \cdot A\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1+\frac{r}{n}\right)^2 \cdot P$ новац након другог обрачуна

$\vdots$

$A(1) = \left(1+\frac{r}{n}\right)^n \cdot P$ новац након 1 године

$A(t) = \left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} \cdot P$ новац након t година

$$\boxed{A(t) = \left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} \cdot P}$$ ОСНОВНА ФОРМУЛА СЛОЖЕНОГ КАМАТНОГ РАЧУНА

* Који је рачун исплативији за клијента?

Шта је веће: $(1+r)^t \cdot P$ или $\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} \cdot P$?

Бернулијева неједнакост: за $x>-1$ и $n \in \mathbb{N}$ важи

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \text{(доказ АН1, индукцијом)}$$

$=$ важи акко $x=0$ или $n=1$

Из Бернулијеве неједнакости следи:

$$\left(1+\frac{r}{n}\right)^n \geq 1+\cancel{n} \cdot \frac{r}{\cancel{n}} = 1+r$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} \geq (1+r)^t$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} \cdot P \geq (1+r)^t \cdot P$$

Исплативији је рачун са n обрачуна годишње, $n \geq 2$.

* Ефективна каматна стопа:

Ефективна к.с. r_e која одговара к.с. r је каматна стопа са којом се користећи прости каматни рачун добија исти новац као када се користи сложен каматни рачун са каматом r.

$$(1+r_e)^t \cdot P = \left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} \cdot P$$

(Из Бернулијеве н. је $r_e \geq r$.)

$$\Rightarrow \quad 1+r_e = \left(1+\frac{r}{n}\right)^n \quad \Rightarrow \boxed{r_e = \left(1+\frac{r}{n}\right)^n - 1}$$

1) У банку је уложено 3104 динара, при чему је каматна стопа на годишњем нивоу 5,75%. Израчунати новац добијен након периода од 3,5 године ако банка користи:
а) прост каматни рачун
б) сложен каматни рачун са месечним обрачуном ($n=12$).
Наћи и ефективну каматну стопу.

а) $P=3104$
$r=5,75\% = 0,0575$
$t=3,5$

$A(t) = (1+r)^t \cdot P$

$A(3,5) = (1+0,0575)^{3,5} \cdot 3104 \approx 3774,88$

б) $A(t) = \left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} \cdot P = \left(1+\frac{0,0575}{12}\right)^{12 \cdot 3,5} \cdot 3104 \approx 3794,15$

$r_e = \left(1+\frac{r}{n}\right)^n - 1 = \left(1+\frac{0,0575}{12}\right)^{12} - 1$

$r_e \approx 0,059 = 5,9\%$.

* Сложен каматни рачун са непрекидним обрачуном (добија се кад $n \to \infty$)

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{r}{n}\right)^n = e^r$$

Из ан1 је познато да низ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ расте ка e.

Покажимо да и $\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$ расте ка e^r. Пошто је $\ln$ растућа фја, то је еквивалентно са тим да $\ln\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$ расте ка r.

$$\varphi(x) = x\ln\left(1+\frac{r}{x}\right), \ x\in(0,+\infty) \quad \leftarrow \text{посматрајмо ову фју}$$

$$\lim_{x\to\infty}\varphi(x) = r$$

$$\varphi'(x) = \ln\left(1+\frac{r}{x}\right) + x\cdot\frac{1}{1+\frac{r}{x}}\cdot\frac{-r}{x^2} = \ln\left(1+\frac{r}{x}\right) - \frac{r}{x+r}$$

$$\varphi''(x) = \frac{1}{1+\frac{r}{x}}\cdot\frac{-r}{x^2} + \frac{r}{(x+r)^2} = \frac{-r}{x^2+rx} + \frac{r}{(x+r)^2} = \frac{-r(x+r)+r\cdot x}{(x+r)^2\cdot x}$$

$$\varphi''(x) = \frac{-r^2}{(x+r)^2\cdot x} < 0 \quad \Rightarrow \varphi' \text{ опада на } (0,+\infty)$$

$$\lim_{x\to\infty}\varphi'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) \geq 0 \text{ на } (0,+\infty)$$

$$\Rightarrow \varphi \uparrow \text{ на } (0,+\infty)$$

$$\Rightarrow \varphi(x) \leq r \ \ \forall x\in(0,+\infty)$$

Дакле, φ расте ка r.

За $m\geq n$ је $\varphi(m)\geq\varphi(n) \Rightarrow \ln\left(1+\frac{r}{m}\right)^m \geq \ln\left(1+\frac{r}{n}\right)^n$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{r}{m}\right)^m \geq \left(1+\frac{r}{n}\right)^n$$

Дакле, што су учесталији обрачуни, то је већи добијени новац. Кад $n\to\infty$ тада имамо непрекидне обрачуне и тада се постиже највећи новац.

$\boxed{A(t) = e^{rt}\cdot P}$ новац добијен након t година

Ефективна каматна стопа: $(1+r_e)^t\cdot P = e^{rt}\cdot P$

$(e^r - 1 \geq r$ за $r\geq 0)$

$$1+r_e = e^r$$

$$\boxed{r_e = e^r - 1}$$

* Кредит

P – кредит који је клијент подигао у банци која користи сложен каматни рачун са n обрачуна годишње и каматом r.

t – временски период отплате дуга

x – рата коју клијент уплаћује на крају сваког периода обрачуна

P_j – део кредита који клијент отплаћује уплатом j-те рате.

$(1 \le j \le nt)$

$$P = \sum_{j=1}^{nt} P_j \quad , \quad x = P_j \cdot \left(1+\frac{r}{n}\right)^{n \cdot \frac{j}{n}}$$

$t_j = \frac{j}{n}$ j-ту рату исплаћујемо након $\frac{j}{n}$ година

$$x = P_j \left(1+\frac{r}{n}\right)^{j}$$

Занима нас колико је x, ако знамо остале податке?

$$P = \sum_{j=1}^{nt} x \cdot \left(1+\frac{r}{n}\right)^{-j} \quad , \quad \left(1+\frac{r}{n}\right)^{-1} = q$$

$$P = \sum_{j=1}^{nt} x \cdot q^{j} = x \cdot \sum_{j=1}^{nt} q^{j} = x \cdot q\left(1+q+\ldots+q^{nt-1}\right)$$

$$P = x \cdot q \cdot \frac{1-q^{nt}}{1-q} = \frac{xq}{1-q} \cdot \left(1-q^{nt}\right) \Rightarrow \boxed{x = \frac{1-q}{q} \cdot P \cdot \frac{1}{1-q^{nt}}}$$

$$\frac{1-q}{q} = \frac{1-\frac{1}{1+\frac{r}{n}}}{\frac{1}{1+\frac{r}{n}}} = \frac{1+\frac{r}{n}-1}{1} = \frac{r}{n}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = P \cdot \frac{r}{n} \cdot \left(1-\left(1+\frac{r}{n}\right)^{-nt}\right)^{-1}}$$

Пример:

$$\left.\begin{aligned} P &= 40000€ \\ r &= 3{,}61\% \\ t &= 20 \text{ година} \\ n &= 12 \end{aligned}\right\} \quad x = 234{,}24€ \text{ рата}$$

(2) Позајмица од 100€ на период од 2 године и каматном стопом r измирена је у 2 годишње рате од по 60€. Одредити r.

$P=100$
$t=2$
$n=1$ (Обрачун се врши једном годишње)
$x=60$

$r=?$

$$x = P\cdot\frac{r}{n}\cdot\left(1-\left(1+\frac{r}{n}\right)^{-nt}\right)^{-1}$$

$$60=100\cdot r\left(1-(1+r)^{-2}\right)^{-1} \quad /:20$$

$$3=5r\left(1-\frac{1}{(1+r)^2}\right)^{-1}$$

$$3\cdot\left(1-\frac{1}{(1+r)^2}\right)=5r \quad /\cdot(1+r)^2$$

$$3\left((1+r)^2-1\right)=5r(1+r)^2$$

$$3(2r+r^2)=5r(1+2r+r^2) \quad /:r$$

$$3(2+r)=5+10r+5r^2$$

$$6+3r=5+10r+5r^2$$

$$5r^2+7r-1=0$$

са − се одбија јер <0

$$r_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49+20}}{10}=\frac{-7+\sqrt{69}}{10}\approx 0{,}13$$

$$\boxed{r=13\%}$$

---

(3) Одредити ефективну каматну стопу за период од 20 година, ако је првих 8 година каматна стопа 6% са годишњим обрачуном, следећих 7 година каматна стопа 5% са полугодишњим обрачуном и последњих 5 година каматна стопа 4% са кварталним обрачуном.

$t=20$
$t_1=8,\ r_1=0{,}06,\ n_1=1$
$t_2=7,\ r_2=0{,}05,\ n_2=2$
$t_3=5,\ r_3=0{,}04,\ n_3=4$

$r_e=?$

P почетни новац
r_e ефективна каматна стопа

$$(1+r_e)^t\cdot\cancel{P}=\left(1+\frac{r_1}{n_1}\right)^{n_1t_1}\cdot\left(1+\frac{r_2}{n_2}\right)^{n_2t_2}\cdot\left(1+\frac{r_3}{n_3}\right)^{n_3t_3}\cdot\cancel{P}$$

$$1+r_e=\left(1+\frac{r_1}{n_1}\right)^{\frac{n_1t_1}{t}}\cdot\left(1+\frac{r_2}{n_2}\right)^{\frac{n_2t_2}{t}}\cdot\left(1+\frac{r_3}{n_3}\right)^{n_3\frac{t_3}{t}}$$

$$r_e=\left(1+\frac{0{,}06}{1}\right)^{\frac{8}{20}}\cdot\left(1+\frac{0{,}05}{2}\right)^{\frac{2\cdot7}{20}}\cdot\left(1+\frac{0{,}04}{4}\right)^{4\cdot\frac{5}{20}}-1$$

$r_e\approx 0{,}0518$ тј. $\boxed{r_e=5{,}18\%}$