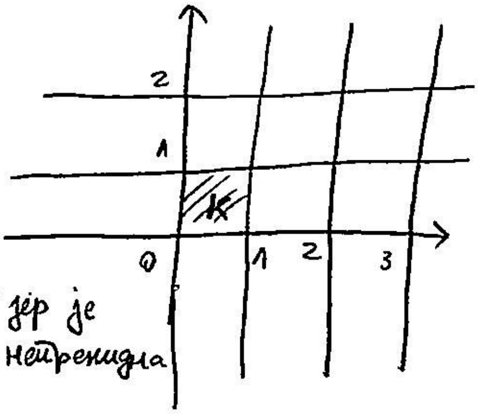
Лиувилова теорема

(Т) Нека је $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ цела и ограничена функција. Тада је f константна.

(1) Нека је $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ цела функција и $f(z)=f(z+1)=f(z+i)$ за све $z\in\mathbb{C}$.
Доказати да је f константна.



* Непрекидна ф-ја на компакту достиже max.

$K=[0,1]\times[0,1]$ је компакт

$|f|$ на K достиже максимум M — јер је непрекидна

$M=\max\{|f(z)| : z\in K\}$

тј. $|f(z)|\le M \quad \forall z\in K$

Из $f(z)=f(z+1)$ је јасно да се индуктивно добија $f(z)=f(z+n)$, $\forall n\in\mathbb{Z}$

Из $f(z)=f(z+i)$ добијамо $f(z)=f(z+i\cdot m)$, $\forall m\in\mathbb{Z}$

па је и $f(z)=f(z+n)=f(z+n+i\cdot m)$, $\forall n,m\in\mathbb{Z}$

$\forall z\in\mathbb{C}$

$\Rightarrow$ ф-ја f на сваком квадрату 1×1 из мреже (на слици) узима исте вредности као на K, па је и ограничена са M свуда.

Покушајмо мало прецизније: Нека је $z\in\mathbb{C}$ произвољан

$z=x+iy$ $\qquad$ $[x]$ цео део од x – највећи цео број мањи од x

$$z = x-[x]+[x]+i\cdot[y]-i[y]+i\cdot y$$

$$z=\underbrace{[x]}_{m}+i\cdot\underbrace{[y]}_{n}+\overbrace{\big(\underbrace{x-[x]}_{\in[0,1]}+i\underbrace{(y-[y])}_{\in[0,1]}\big)}^{z_1}$$

$$z=m+i\cdot n+z_1,\quad z_1\in K$$

$$\Rightarrow f(z)=f(z_1+m+in)=f(z_1)$$

$$\Rightarrow |f(z)|\le M \quad \forall z\in\mathbb{C} \overset{\text{Лиувилова Т}}{\Longrightarrow} f \text{ је константна}$$

② Нека је f цела функција и $|f(z)| \le e^{\mathrm{Re}\, z}$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Доказати да постоји константа $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$ тако да важи $f(z) = \alpha e^{z}$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

$|e^{z}| = e^{\mathrm{Re}\, z}$, тј. $|f(z)| \le |e^{z}|$

па је $\left| \frac{f(z)}{e^{z}} \right| \le 1$

функција $g(z) = \frac{f(z)}{e^{z}}$ је добро дефинисана јер $e^{z} \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$ и цела је јер је количник две целе ф-је.

Дакле, $|g(z)| \le 1$, g цела $\Rightarrow$ $g = \mathrm{const}$.
Лиувилова Т.

$\Rightarrow$ $g(z) = \alpha$ $\forall z \in \mathbb{C}$ за неко $\alpha \in \overline{\mathbb{D}}$ ($|g(z)| \le 1$, па $|\alpha| \le 1$)

па је $f(z) = e^{z} \cdot \alpha$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

③ Нека је f цела функција таква да је $a \,\mathrm{Re} f(z) + b \cdot \mathrm{Im} f(z) \geq c$ за све $z \in \mathbb{C}$, где су $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $(a,b) \neq (0,0)$. Доказати да је f константна функција.

$a \,\mathrm{Re} f + b \,\mathrm{Im} f \geq c$

$-a \,\mathrm{Re} f - b \,\mathrm{Im} f \le -c$

$e^{-a \mathrm{Re} f - b \mathrm{Im} f} \le e^{-c}$

Желимо да буде $|e^{g}| = e^{-a \mathrm{Re} f - b \mathrm{Im} f}$!

тј $\mathrm{Re}\, g = -a \mathrm{Re} f - b \,\mathrm{Im} f$

па је $g = -a \cdot f + b \cdot i \cdot f$

$f = u + iv$
$\mathrm{Im} f = v$
$bi \cdot f = bi \cdot u - bv$
$\mathrm{Re}\, bif = -bv$

$g(z) = -a \cdot f(z) + bi \cdot f(z)$

$g(z) = -(a - ib) f(z)$ g је цела функција

$\Rightarrow$ e^{g} је цела ф-ја, $|e^{g}| \le e^{-c}$ ограничена

$\overset{\text{Лиувилова Т}}{\Rightarrow}$ e^{g} је константна

$h(z) = e^{g(z)} = \alpha, \ \alpha \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow h'(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$e^{g(z)} \cdot g'(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow g'(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow -(a-ib) f'(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Из услова $(a,b) \neq (0,0)$ следи $a - ib \neq 0$

$\Rightarrow \quad f'(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow f = const.$

④ Нека је f цела функција и $|f'(z)| \leq |z| \ \forall z \in \mathbb{C}$.
Доказати да је $f(z) = a + bz^2 \ \forall z \in \mathbb{C}$, где су $a, b \in \mathbb{C}$ и $|b| \leq \frac{1}{2}$.

произвољно
$z \in \mathbb{C}$ фиксирано, γ_r позитивно оријентисана кружница са центром у z и пол. r.
При чему је $r > 0$ произвољно

КИФ: $$|f''(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f'(w)}{(w-z)^2} dw \right| \underset{\text{ОИН}}{\leq} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{|f'(w)|}{|w-z|^2} |dw|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{|w|}{|w-z|^2} |dw| \underset{|w| \leq |w-z| + |z|}{\leq} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{|w-z| + |z|}{|w-z|^2} |dw|$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\gamma_r} \frac{|dw|}{|w-z|} + \int_{\gamma_r} \frac{|z|}{|w-z|^2} |dw| \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \int_{\gamma_r} |dw| + \frac{1}{r^2} \cdot |z| \cdot \int_{\gamma_r} |dw| \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{r} \cdot 2r\pi + \frac{1}{r^2} \cdot |z| \cdot 2r\pi \right)$$

$$= 1 + \frac{|z|}{r} \qquad / \lim_{r \to +\infty}$$

$\Rightarrow \quad |f''(z)| \leq 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$ (јер је z било произвољно)

Дакле, $|f''(z)| \le 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$, f'' је цела функција $\overset{\text{Лиувилова т.}}{\Rightarrow}$ $f'' = const.$

$$f''(z) = \alpha, \ \alpha \in \mathbb{C}$$

$$f'(z) = \alpha z + \beta, \ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

$$f(z) = \frac{\alpha z^2}{2} + \beta z + \gamma, \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$$

$$f(z) = \frac{\alpha}{2} z^2 + \beta z + \gamma, \quad f'(0) = \beta, \ |f'(0)| \le 0 \Rightarrow \boxed{\beta = 0}$$

$|f''(z)| \le 1$ даје $|\alpha| \le 1$

$$f(z) = \frac{\alpha}{2} z^2 + \gamma, \quad b = \frac{\alpha}{2}, \ |b| \le \frac{1}{2}, \ a = \gamma$$

$$\Rightarrow \boxed{f(z) = a + b z^2, \ |b| \le \frac{1}{2}}$$

Основна теорема алгебре: Сваки неконстантан полином има нулу у $\mathbb{C}$.

Последица: Полином степена $n \in \mathbb{N}$ има тачно n нула у $\mathbb{C}$.

(5) Нека је f цела функција, при чему важи $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$. Доказати да f има бар 1 нулу у $\mathbb{C}$. (Специјално, ако је f неконстантан полином, добија се основна теорема алгебре)

Прс. f нема нула у $\mathbb{C}$, тада можемо посматрати функцију $g(z) = \frac{1}{f(z)}$
g је добро дефинисана и цела

из $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ следи $\lim_{z\to\infty} g(z) = 0$ па постоји $R>0$ тд. је $|g(z)| \le 1$ за $|z|>R$ тј. на $\mathbb{C} \setminus \overline{D(0,R)}$

$|g|$ је непрекидна, па достиже max на компакту $\overline{D(0,R)} \Rightarrow |g(z)| \le M \quad \forall z \in \overline{D(0,R)}$

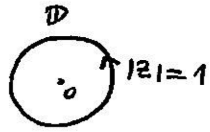
Дакле, $|g(z)| \le \max\{M, 1\}$, $\forall z \in \mathbb{C}$ тј. g је ограничена
Пошто је g и цела $\Rightarrow g = const. \Rightarrow f = const.$ $\not\exists$ са условом $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$. $\Rightarrow$ f има нулу у $\mathbb{C}$

⑥ Доказати да не постоји полином $p(z)$, степена $m\in\mathbb{N}$, такав да је

$$\int_{|z|=1} \frac{p(z)}{(n+2)z-1}\,dz = 0 \quad \text{за све } n\in\{0,1,\dots,m\}$$

<u>птс</u> $\exists$ полином p који задовољава овај услов

$$\frac{1}{n+2}\cdot\int_{|z|=1} \frac{p(z)}{z-\frac{1}{n+2}}\,dz = 0$$



КИФ: $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{p(z)}{z-\frac{1}{n+2}}\,dz = p\left(\frac{1}{n+2}\right)$, $\frac{1}{n+2}\in\mathbb{D}$ $\forall n\in\{0,1,\dots,m\}$

$\Rightarrow$ $p\left(\frac{1}{n+2}\right)=0$ $\forall n=0,1,\dots,m$ тј. p има $m+1$ нула

али то је немогуће јер је p степена m !

⑦ Доказати да не постоји полином $p(z)$ степена $m\in\mathbb{N}$, такав да је $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{p(z)}{(3z-1)^{n+1}}\,dz = 0$, за све $n\in\{0,1,\dots,m\}$.

<u>птс</u> $\exists p$ који задовољава услове

$$\int_{|z|=1}\frac{p(z)}{\left(z-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\cdot 3^{n+1}}\,dz = 0 \Rightarrow \int_{|z|=1}\frac{p(z)}{\left(z-\frac{1}{3}\right)^{n+1}}\,dz = 0$$

КИФ: $\displaystyle\frac{n!}{2\pi i}\int_{|z|=1}\frac{p(z)}{(z-\frac{1}{3})^{n+1}}\,dz = p^{(n)}\left(\tfrac{1}{3}\right)$, $\frac{1}{3}\in\mathbb{D}$, $\partial\mathbb{D}=\gamma$
$\gamma: |z|=1$

Дакле, $p^{(n)}\left(\frac{1}{3}\right)=0$ за све $n\in\{0,1,\dots,m\}$

Тејлоров развој око $\frac{1}{3}$: $\displaystyle p(z)=\sum_{n=0}^{m}\frac{p^{(n)}(\frac{1}{3})}{n!}\left(z-\tfrac{1}{3}\right)^n$

(p је степена m, па зато сума иде до m)

Али, тада је $p(z)=0$ $\forall z\in\mathbb{C}$
јер су сви коефицијенти 0.

⨳ са условом да је p полином степена $m\in\mathbb{N}$.

⑧ Нека је $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ цела функција, при чему важи $f(z) = f(\frac{1}{z})$ $\forall z \in \mathbb{C}^{\times}$.
Доказати да је f константна функција.

$|f|$ непрекидна достиже max на компакту $\overline{\mathbb{D}}$

$$M = \max_{\overline{\mathbb{D}}} |f|$$

Ако $z \in \overline{\mathbb{D}}$, јасно је $|f(z)| \leq M$.

За $z \notin \overline{\mathbb{D}}$, тј. $|z| > 1$ је $|\frac{1}{z}| < 1$, па је $|f(\frac{1}{z})| \leq M$

а пошто је $f(z) = f(\frac{1}{z})$, то је и $|f(z)| \leq M$.

Дакле, $|f(z)| \leq M$ $\forall z \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $f = \text{const.}$

Лиувилова т.

⑨ Нека је $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ цела функција и важи $|f(z)| \geq |\cos z| + |\sin z|$, $\forall z \in \mathbb{C}$.
Доказати да је f константна функција.

$$(\forall z \in \mathbb{C}) \quad \sin^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = 1$$

$$(|\cos z| + |\sin z|)^2 \geq |\cos z|^2 + |\sin z|^2 \geq |\cos^2 z + \sin^2 z| = 1$$

$\Rightarrow$ $|f(z)| \geq 1$ па је $\left|\frac{1}{f(z)}\right| \leq 1$

($f \neq 0$ јер је $|f(z)| \geq 1$ $\forall z \in \mathbb{C}$)

функција $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ је добро дефинисана и холоморфна на $\mathbb{C}$ тј. цела

$|g(z)| \leq 1$

$\Rightarrow$ $g = \text{const.}$ $\Rightarrow$ $f = \text{const.}$

Лиувилова т.