Променљиве каматне стопе

дефиниција

Променљива каматна стопа је непрекидна функција $r : [0,\infty) \to [0,\infty)$.

$r(s)$ је каматна стопа у временском тренутку s $(s \geq 0)$

фја r је непрекидна у тачки s ако

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)\ |h| < \delta \Rightarrow |r(s+h) - r(s)| < \varepsilon$$

$\downarrow$ за довољно мало h, $r(s+h)$ можемо апроксимирати са $r(s)$

$A(t)$ укупан новац у временском тренутку t $(t \geq 0)$

$A(0)$ је почетни новац

У временском тренутку $s+h$ укупан новац можемо апроксимирати на следећи начин:

$$A(s+h) = (1+r(s))^{h} \cdot A(s) \approx (1 + h \cdot r(s)) \cdot A(s)$$

$$\frac{A(s+h) - A(s)}{h} \approx r(s) \cdot A(s)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(s+h) - A(s)}{h} = A'(s)$$ (под додатном пт. да је A диференц. фја)

$$A'(s) = r(s) \cdot A(s)$$

$$\frac{A'(s)}{A(s)} = r(s) \quad \Big/ \int_0^t ds \quad (0 \leq s \leq t)$$

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^t \frac{A'(s)}{A(s)}\, ds = \int_0^t r(s)\, ds \\ &\int_0^t \frac{d(A(s))}{A(s)} = \ln A(s) \Big|_0^t = \ln A(t) - \ln A(0) = \ln \frac{A(t)}{A(0)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_0^t r(s)\, ds = \ln \frac{A(t)}{A(0)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A(t)}{A(0)} = e^{\int_0^t r(s) ds} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A(t) = A(0) \cdot e^{\int_0^t r(s) ds}}$$

ОСНОВНА ФОРМУЛА РАЧУНА СА ПРОМЕНЉИВОМ КАМАТНОМ СТОПОМ

Ако је $A(0)=1$ онда је $A(t)=e^{\int_0^t r(s)ds}$.

Ако је $r(s)\equiv r$ (константа) онда је $A(t)=A(0)\cdot e^{rt}$ (формула за сложен каматни рачун са непрекидним обрачуном)

$PV(t)$ – PRESENT VALUE – садашња вредност која одговара променљивој каматној стопи $r(s)$

* дефинише се као почетни новац са којим је укупан новац у трен. t једнак 1, користећи каматну стопу $r(s)$.

$$1 = PV(t)\cdot e^{\int_0^t r(s)ds} \Rightarrow \boxed{PV(t)=e^{-\int_0^t r(s)ds}}$$

деф: Крива добити променљиве каматне стопе $r(s)$ је функција $\tilde{r}$ т.д.

$$\begin{cases} \tilde{r}(t)=\frac{1}{t}\int_0^t r(s)ds & \text{где је } t>0 \\ \tilde{r}(0)=0 \end{cases}$$

1. Дате су каматне стопе r_1 и r_2. Одредити криву добити и садашњу вредност променљиве каматне стопе $r(s)=\frac{1}{1+s}r_1+\frac{s}{1+s}r_2$.

$$\int_0^t r(s)ds = \int_0^t\left(\frac{1}{1+s}r_1+\frac{s}{1+s}r_2\right)ds = \int_0^t\left(\frac{1}{1+s}r_1+\frac{1+s-1}{1+s}r_2\right)ds$$

$$= \int_0^t\left(r_2+\frac{r_1-r_2}{1+s}\right)ds = r_2\cdot t+(r_1-r_2)\cdot \ln(1+s)\Big|_0^t = r_2t+(r_1-r_2)\ln(1+t)$$

$$PV(t)=e^{-\int_0^t r(s)ds}=e^{-r_2t-(r_1-r_2)\ln(1+t)}=e^{-r_2t}\cdot(1+t)^{r_2-r_1}$$

$$\tilde{r}(t)=\frac{1}{t}\int_0^t r(s)ds = r_2+\frac{r_1-r_2}{t}\ln(1+t).$$

② Нека је променљива каматна стопа $r(t)$ растућа функција. Доказати да је њена крива добити растућа функција.

$$\tilde{r}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t r(s)\,ds$$

$r(s)$ је непрекидна $\Rightarrow \tilde{r}$ је диференц. (као композиција таквих)

Подсетник (Ан1):

$\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$, $\Phi(x) = \int_a^x \varphi(t)\,dt$

φ интеграбилна $\Rightarrow \Phi$ је непрекидна

φ непрекидна $\Rightarrow \Phi$ је диф и $\Phi'(x) = \varphi(x)$

$$\Rightarrow \tilde{r}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t r(s)\,ds \quad /'$$

$$\tilde{r}'(t) = \frac{r(t)\cdot t - \int_0^t r(s)\,ds \cdot 1}{t^2} = \frac{t\,r(t) - \int_0^t r(s)\,ds}{t^2}$$

$$\int_0^t r(s)\,ds \underset{\substack{\uparrow \\ r(t) \geq r(s) \ \forall s \in (0,t)}}{\leq} \int_0^t r(t)\,ds = t \cdot r(t)$$

$$\Rightarrow \tilde{r}'(t) \geq 0 \Rightarrow \tilde{r} \text{ је растућа ф-ја}$$

③ Дате су каматне стопе r_1, r_2 и r_3. Одредити криву добити променљиве каматне стопе
$$r(s) = \frac{1}{s^2+4s+3} r_1 + \frac{3s+1}{s^2+4s+3} r_2 + \frac{s^2+s+1}{s^2+4s+3} r_3 .$$

$\tilde{r}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t r(s)\,ds$ крива добити

$$\int_0^t \frac{ds}{s^2+4s+3} = \int_0^t \frac{ds}{(s+1)(s+3)} = \frac{1}{2}\left(\int_0^t \frac{ds}{s+1} - \int_0^t \frac{ds}{s+3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln(s+1)\Big|_0^t - \ln(s+3)\Big|_0^t\right) = \frac{1}{2}\left(\ln|t+1| - \ln|t+3| + \ln 3\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\left|\frac{t+1}{t+3}\right|\cdot 3\right)$$

$$= \ln\sqrt{\frac{3(t+1)}{t+3}}, \quad t>0 \text{ (не морамо писати } |\,|\text{)}$$

$$\int_0^t \frac{3s+1}{s^2+4s+3}ds = \int_0^t \frac{3s+1}{(s+1)(s+3)}ds$$

$$\frac{3s+1}{(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+3}$$

$$3s+1 = As+3A+Bs+B$$

$$\left.\begin{aligned} 3 &= A+B \\ 1 &= 3A+B \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} 2A &= -2 \\ A &= -1 \\ B &= 4 \end{aligned}$$

$$= \int_0^t \left(\frac{-1}{s+1} + \frac{4}{s+3}\right) ds$$

$$= -\ln(s+1)\Big|_0^t + 4\ln(s+3)\Big|_0^t = -\ln(t+1) + 4\ln(t+3) - 4\ln 3$$

$$= \ln \frac{(t+3)^4}{(t+1)\cdot 3^4}$$

$$\int_0^t \frac{s^2+s+1}{s^2+4s+3}ds = \int_0^t \frac{s^2+4s+3-(3s+1)-1}{s^2+4s+3}ds = \int_0^t ds - \int_0^t \frac{s+1}{s^2+4s+3}ds - \int_0^t \frac{ds}{s^2+4s+3}$$

$$= s\Big|_0^t - \ln\frac{\left(\frac{t}{3}+1\right)^4}{t+1} - \ln\sqrt{\frac{3(t+1)}{t+3}} = t - \ln\frac{\left(\frac{t}{3}+1\right)^4}{t+1} - \ln\sqrt{\frac{3(t+1)}{t+3}}$$

$$\int_0^t r(s)ds = r_1\cdot\ln\sqrt{\frac{3(t+1)}{t+3}} + r_2\cdot\ln\frac{\left(\frac{t}{3}+1\right)^4}{t+1} + r_3\cdot\left(t - \ln\frac{\left(\frac{t}{3}+1\right)^4}{t+1} - \ln\sqrt{\frac{3(t+1)}{t+3}}\right)$$

$$= (r_1-r_3)\cdot\ln\sqrt{\frac{3(t+1)}{t+3}} + (r_2-r_3)\ln\frac{\left(\frac{t}{3}+1\right)^4}{t+1} + r_3\cdot t$$

$$\boxed{\bar{r}(t) = \frac{r_1-r_3}{t}\ln\sqrt{\frac{3(t+1)}{t+3}} + \frac{r_2-r_3}{t}\ln\frac{\left(t/3+1\right)^4}{t+1} + r_3}$$

(4) а) Доказати да је крива добити $\bar{r}(t)$ променљиве каматне стопе $r(t)$ растућа ф-ја акко за садашњу вредност $PV(t)$ важи

$$PV(t)^{\alpha} \le PV(\alpha t), \text{ за све } 0 \le \alpha \le 1 \text{ и } t \ge 0.$$

б) Доказати да за све $a \ge 0$ важи $\int_0^a A(t) r(t)\,dt = A(a) - A(0)$, где је $r(t)$ променљива каматна стопа (ПКС) и $A(t)$ укупан новац у тренутку t који одговара каматној стопи $r(t)$.

а) $\bar{r}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t r(u)\,du$ крива добити

$PV(t) = e^{-\int_0^t r(u)\,du}$ садашња вредност

За $PV(t)$ важи следеће: $\ln PV(t) = -\int_0^t r(u)\,du$, па је $\boxed{\bar{r}(t) = -\frac{\ln PV(t)}{t}}$

Пошто треба да докажемо еквиваленцију, треба да докажемо две импликације.

$\Rightarrow$: $\bar{r}(t)$ је растућа (п.п.), $\alpha t \le t$

$$\Rightarrow \bar{r}(\alpha t) = -\frac{\ln PV(\alpha t)}{\alpha t} \le \bar{r}(t)$$

$$\Rightarrow \frac{-\ln PV(\alpha t)}{\alpha t} \le \frac{-\ln PV(t)}{t}$$

$$\Rightarrow \ln PV(\alpha t) \ge \alpha \cdot \ln PV(t)$$

$$\Rightarrow PV(\alpha t) \ge PV(t)^{\alpha}$$

б)

$$\int_0^a A(t) r(t)\,dt \overset{?}{=} A(a) - A(0)$$

$A(t) = A(0)\, e^{\int_0^t r(s)\,ds}$, $A(t)$ диф.

$$\Rightarrow A'(t) = A(0) \cdot e^{\int_0^t r(s)\,ds} \cdot r(t) = A(t) \cdot r(t)$$

$$\Rightarrow \int_0^a A(t) r(t)\,dt = \int_0^a A'(t)\,dt = A(a) - A(0).$$

$A'(t) = A(t) \cdot r(t)$! (имали смо ово на почетку)

$\Leftarrow$: $PV(\alpha t) \ge PV(t)^{\alpha}$, $0 \le \alpha \le 1$, $t \ge 0$

$s \le t$ произвољно

Да ли је $\bar{r}(s) \le \bar{r}(t)$?

$$\bar{r}(s) = -\frac{\ln PV(s)}{s} \overset{?}{\le} -\frac{\ln PV(t)}{t}$$

$$\frac{\ln PV(s)}{s} \overset{?}{\ge} \frac{\ln PV(t)}{t}$$

$$\ln PV(t) \cdot \frac{s}{t} \overset{?}{\le} \ln PV(s)$$

$$\ln PV(t)^{\frac{s}{t}} \overset{?}{\le} \ln PV(s)$$

$$PV(t)^{\frac{s}{t}} \overset{?}{\le} PV(s) \quad (*)$$

За $\alpha = \frac{s}{t}$ је $(*)$ у ствари

$PV(t)^{\alpha} \le PV(\alpha t)$ што важи јер $\alpha = \frac{s}{t} \in [0,1]$ $(s \le t)$