① Доказати да

а) за свако $n \in \mathbb{N}$, $n>1$ и $\alpha>0$ важи:

$$\frac{1}{n^{1+\alpha}} < \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha}} - \frac{1}{n^{\alpha}}\right)$$

б) за свако $p>1$ важи: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \le \frac{p}{p-1}$

а) може одмах да се примени Лагранжова т. на $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$ и $[n-1,n]$

$$f(n)-f(n-1) = f'(c)\cdot(n-n+1) \quad \text{за неко } c \in (n-1,n)$$

$$f'(x) = \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}}$$

$$f(n)-f(n-1) = \frac{-\alpha}{c^{\alpha+1}}, \quad \alpha>0$$

$$f(n-1)-f(n) = \frac{\alpha}{c^{\alpha+1}} > \frac{\alpha}{n^{\alpha+1}} \quad \text{јер је } c<n$$

$$c^{\alpha+1}<n^{\alpha+1}$$

па $\frac{1}{c^{\alpha+1}} > \frac{1}{n^{\alpha+1}}$

(а може и постепено, да се уочи нека друга ф-ја и да се докаже неједнакост)

б)

$$S_N = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\dots+\frac{1}{N^p}, \quad \frac{1}{n^p} < \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{(n-1)^{p-1}} - \frac{1}{n^{p-1}}\right)$$

$$S_N < 1 + \frac{1}{p-1}\cdot\left(\frac{1}{1^{p-1}} - \cancel{\frac{1}{2^{p-1}}} + \cancel{\frac{1}{2^{p-1}}} - \cancel{\frac{1}{3^{p-1}}} + \dots + \cancel{\frac{1}{(N-1)^{p-1}}} - \frac{1}{N^{p-1}}\right)$$

$$S_N < 1 + \frac{1}{p-1}\left(1-\frac{1}{N^{p-1}}\right), \quad p>1$$

$\exists \lim_{N\to\infty} S_N$ јер је познато да $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ конв $\Leftrightarrow p>1$ (*)

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} S_N \le 1+\frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1} \quad \text{за све } p>1$$

Напомена: уместо овога можемо да размишљамо овако:

S_N растући (јер увек додајемо позитивно $\frac{1}{n^p}$)

$S_N < 1+\frac{1}{p-1}$ $\forall N \in \mathbb{N}$ (за $p>1$) - ограничен одозго

$\Rightarrow \exists \lim_{N\to\infty} S_N$ што нам даје и други доказ (*)

(2) Нека је $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергентан ред. Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, где је $b_n = \frac{(n+a_n)a_n}{(n+1)(1+a_n)}$, под ст-да је $a_n \neq -1$ за све $n \in \mathbb{N}$ и

а) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ конвергира

б) $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ конвергира, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конв., $a_n \neq -1\ \forall n \in N \overset{?}{\Rightarrow} \sum_{n=2}^{\infty} b_n$ конв ?

$$b_n = \frac{(n+a_n)a_n}{(n+1)(a_n+1)} = \frac{(n-1+a_n+1)\,a_n}{(n+1)(a_n+1)} = \frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{a_n}{a_n+1} + \frac{a_n}{n+1}$$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}$ конв на основу Абеловог критеријума

  [$\sum a_n$ конв, $\frac{1}{n+1}$ монотон и ограничен]

- шта је са $\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{a_n}{a_n+1}$?

$$\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{a_n}{a_n+1} = \frac{n+1-2}{n+1}\cdot\frac{a_n}{a_n+1} = \frac{a_n}{a_n+1} - \frac{2a_n}{(n+1)(a_n+1)}$$

$$= \frac{a_n(1+a_n)-a_n^2}{1+a_n} - \frac{2a_n}{(n+1)(a_n+1)}$$

$$= a_n - \frac{a_n^2}{1+a_n} - \frac{2a_n}{(n+1)(a_n+1)}$$

због $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конв $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

па је $\frac{a_n^2}{1+a_n} \sim a_n^2,\ n\to\infty$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n}$ је конвергентан

остаје још: $\frac{2a_n}{(n+1)(a_n+1)}$, $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ па је $1+a_n \geq \frac{1}{2}$ за $n \geq n_0$

$$\left|\frac{2a_n}{(n+1)(a_n+1)}\right| \leq 4\cdot\left|\frac{a_n}{n+1}\right| \underset{A^2+B^2\geq 2AB}{\leq} 2\cdot\underbrace{\left(a_n^2 + \frac{1}{(n+1)^2}\right)}_{\text{оба конвергирају}}$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2a_n}{(n+1)(a_n+1)}\right|$ конв. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a_n}{(n+1)(a_n+1)}$ конв.

Дакле, $b_n = \underbrace{a_n}_{\text{конв}} - \underbrace{\frac{a_n^2}{1+a_n}}_{\text{конв.}} - \underbrace{\frac{2a_n}{(n+1)(a_n+1)}}_{\text{конв.}} + \underbrace{\frac{a_n}{n+1}}_{\text{конв.}}$

па $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергира.

③ Испитати конвергенцију реда $\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{n}\log\frac{n+1}{n-1}$.

$$a_n = \sqrt{n}\log\frac{n+1}{n-1} = \sqrt{n}\log\left(1+\frac{2}{n-1}\right) > 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$a_n = \sqrt{n}\cdot\log\left(1+\frac{2}{n-1}\right) = \sqrt{n}\cdot\left(\frac{2}{n-1} - \frac{4}{(n-1)^2\cdot 2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= 2\sqrt{n}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{(n-1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 2\sqrt{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1} - \frac{1}{n^2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= 2\sqrt{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{n^2}\cdot\left(1+\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= 2\sqrt{n}\cdot\left(\frac{1}{n} + \cancel{\frac{1}{n^2}} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \cancel{\frac{1}{n^2}} - \frac{2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= 2\sqrt{n}\cdot\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right), \ n\to\infty$$

$a_n \sim \frac{2}{\sqrt{n}}, \ n\to\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ дивергира

Овде је чак довољно развити само до првог степена.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира.

④ Наћи a, b, c да ред $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1} + an + b + \frac{c}{n}\right)$ конвергира.

$$\sqrt{n^2+n+1} = n\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = n\cdot\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Хоћемо да разв. до $\frac{1}{n^2}$

$$= n\cdot\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) + \binom{\frac{1}{2}}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2 + \binom{\frac{1}{2}}{3}\cdot\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^3 + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$

$$= n + \frac{n}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) + n\cdot\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}}{2}\,\frac{1}{n^2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 + n\,\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{\cancel{-3}}{2}}{\cancel{3}\cdot 2\cdot 1}\,\frac{1}{n^3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$= n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{-1}{8}\cdot\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{16} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \ n\to\infty$$

$$= n + \frac{1}{2} + \frac{3}{8n} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{16n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \ n\to\infty$$

$$= n + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{n} + \frac{-3}{16n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \ n\to\infty \quad\Rightarrow\quad a=-1, \ b=-\frac{1}{2}, \ c=-\frac{3}{8}$$

2 б) $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $b_n = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{a_n}{1+a_n} + \frac{a_n}{n+1}$

$$\frac{a_n}{1+a_n} = \frac{a_n(1-a_n)}{1-a_n^2} = \frac{a_n - a_n^2}{1-\frac{1}{n}} = \frac{a_n - a_n^2}{\frac{n-1}{n}} \quad , a_n^2 = \frac{1}{n}$$

$$b_n' = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{a_n}{1+a_n} = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot (a_n - a_n^2) = \frac{n}{n+1} \cdot (a_n - a_n^2) = \frac{n}{n+1} a_n - \frac{1}{n+1}$$

$$b_n' = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) a_n - \frac{1}{n+1} = a_n - \frac{a_n}{n+1} - \frac{1}{n+1}$$

$$b_n' = \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}(n+1)} - \frac{1}{n+1}$$

диверґира

конв. по Лајбницовом кр.

конв. апсолутно јер $\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}(n+1)}\right| \sim \frac{1}{n^{3/2}}$, $n \to \infty$

$\Rightarrow$ конв.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n'$ диверґира

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ диверґира