Нормалне фамилије

T тополошки простор, (X,d) метрички простор

дефl: Низ $f_n : T \to X$ конвергира К-равномерно ка $f : T \to X$ у ознаци $f_n \overset{лок}{\rightrightarrows} f$ ако f_n конвергира ка f равномерно на сваком компакту $K \subseteq T$. (подразумевано $n \to \infty$)

$$f_n \overset{лок}{\rightrightarrows} f \iff (\forall K \subseteq T, \text{ компакт } K)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall z \in K)\, d(f_n(z), f(z)) < \varepsilon$$

$n_0 = n_0(\varepsilon, K)$ зависи од ε и K

код нас углавном: $T \subseteq \mathbb{C}$ метрички простор са наслеђеном метриком

$X = \mathbb{C}$ са уобичајеном метриком

или $X = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \overline{\mathbb{C}}$ са сферном метриком

$$d_s(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}$$

$$d_s(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}$$

деф2: Кажемо да је фамилија $\mathcal{F}$ пресликавања из T у X НОРМАЛНА ако сваки низ пресликавања $\{f_n\}$ из $\mathcal{F}$ има подниз $\{f_{n_k}\}$ који конвергира равномерно на компактима $K \subseteq T$, тј. $f_{n_k} \overset{лок}{\rightrightarrows} f$ $(f : T \to X)$.

$\mathcal{H}(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{C} \mid f \text{ холоморфна} \}$ где је $\Omega \subseteq \mathbb{C}$

Тврђење: 1) $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f_n \overset{лок}{\rightrightarrows} f \implies f \in \mathcal{H}(\Omega)$

2) $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f_n \overset{лок}{\rightrightarrows} f \implies f_n' \overset{лок}{\rightrightarrows} f'$

$X = \mathbb{C}$ или $X = \overline{\mathbb{C}}$

деф3: фамилија $\mathcal{F}$ пр. из Ω у X је равномерно ограничена на $K \subseteq \Omega$ ако постоји $M \geq 0$ тд је $(\forall f \in \mathcal{F})(\forall z \in K)\ |f(z)| \leq M$.

Ω област

Теорема 1 (Монтел) Ако је $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$ равномерно ограничена на сваком компакту $K \subseteq \Omega$, онда је $\mathcal{F}$ нормална фамилија.

Важи и обратно!

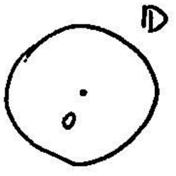
(Монтел 2)

<u>Теорема 2</u>: Нека је $\Omega \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ и $a,b,c \in \overline{\mathbb{C}}$ 3 различите тачке и

$$\mathcal{F} = \{ f : \Omega \to \overline{\mathbb{C}} \setminus \{a,b,c\} \mid f \text{ холоморфна} \}.$$

Тада је $\mathcal{F}$ нормална фамилија.

(1) Нека је $\{f_n\}$ низ холоморфних ф-ја на $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
Ако постоји $M > 0$ тд. $\int_C |f_n(z)|\,|dz| \leq M$ за свако f_n и за сваки круг C из $\mathbb{D}$, доказати да $\{f_n\}$ има подниз који конвергира равномерно на свим компактима $K \subseteq \mathbb{D}$. (тј. доказати да је фамилија $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ нормална фамилија)



$f_n : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ $\qquad$ $\mathcal{F} = \{ f_n : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \mid n \in \mathbb{N} \}$

$$\int_C |f_n(z)|\,|dz| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

* Покажимо да је фамилија $\mathcal{F}$ равномерно ограничена на сваком компакту $K \subseteq \mathbb{D}$.

Нека је $z_\alpha \in \mathbb{D}$ произвољна и нека је $R_\alpha > 0$ тд.
$\overline{D}(z_\alpha, R_\alpha) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_\alpha| \leq R_\alpha \} \subseteq \mathbb{D}$. Тада за свако $z \in D(z_\alpha, \frac{R_\alpha}{2})$ применимо Кошијеву интегралну формулу на f_n

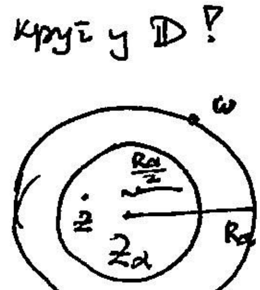
$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_\alpha, R_\alpha)} \frac{f_n(\omega)}{\omega - z}\, d\omega$$

$\partial D(z_\alpha, R_\alpha)$ је круг у $\mathbb{D}$!

$$|f_n(z)| \overset{\text{онн}}{\leq} \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\partial D(z_\alpha, R_\alpha)} \frac{|f_n(\omega)|}{|\omega - z|}\, |d\omega|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{R_\alpha} \int_{\partial D(z_\alpha, R_\alpha)} |f_n(\omega)|\,|d\omega|$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{услов}}}{\leq} \frac{1}{\pi R_\alpha} \cdot M = \frac{M}{\pi R_\alpha}$$



$|\omega - z| > \frac{R_\alpha}{2}$

$\frac{1}{|\omega - z|} < \frac{2}{R_\alpha}$

Дакле, за $\forall z \in D(z_\alpha, \frac{R_\alpha}{2})$ је $|f_n(z)| \leq \frac{M}{\pi R_\alpha} = M_\alpha$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Нека је сада $K \subseteq \mathbb{D}$ произвољан компакт из $\mathbb{D}$.

K је покривен фамилијом $\{D(z_\alpha, \frac{R_\alpha}{2}) : z_\alpha \in \mathbb{D}\}$, па због компактности има коначно подпокривање тј. $K \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} D(z_\alpha, \frac{R_\alpha}{2})$, A коначан скуп

Нека је $M_K = \max_{\alpha \in A} M_\alpha$.

(Докажимо да је M_K ограничење на K)

Ако је $z \in K$ произвољно онда $\exists \alpha \in A$ тд. $z \in D(z_\alpha, \frac{R_\alpha}{2})$, па важи $|f_n(z)| \leq M_\alpha \leq M_K$.

Дакле, $(\forall z \in K)(\forall n \in \mathbb{N})\ |f_n(z)| \leq M_K$, тј. фамилија $\mathcal{F}$ је равномерно ограничена на сваком компакту $K \subseteq \mathbb{D}$.

Сада на основу Монтелове теореме следи да је $\mathcal{F}$ нормална.