② Нека je $R(x,y)=(x^2+y^2)e^x$, $x,y>0$.

Наћи холоморфну ф-ју f т.д. je $f(z)=R(x,y)e^{i\varphi(x,y)}$, тј. т.д. je $|f|=R(x,y)$.

КР услови: $\dfrac{\partial R}{\partial x}=R\cdot\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$

$$\frac{\partial R}{\partial y}=-R\frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial R}{\partial x}=2xe^x+(x^2+y^2)e^x=(x^2+y^2)e^x\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Rightarrow\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{2x+x^2+y^2}{x^2+y^2}=1+\frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial R}{\partial y}=2ye^x=(x^2+y^2)e^x\cdot(-1)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{-2y}{x^2+y^2}$$

$$\varphi(x,y)=\int\frac{-2y}{x^2+y^2}dx$$

$$=\int\frac{-2y}{y^2\left(1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)}dx=\int\frac{-2}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}d\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$=-2\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+C(y)$$

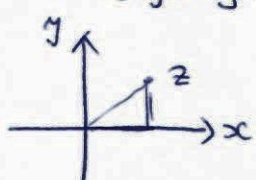
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-2\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{-x}{y^2}+C'(y)=1+\frac{2x}{x^2+y^2}\Rightarrow C'(y)=1$$

$$\Rightarrow C(y)=y+c$$

$$\boxed{\varphi(x,y)=-2\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+y+c}$$

$$R(x,y)e^{i\varphi(x,y)}=(x^2+y^2)e^x\cdot e^{-2i\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+iy+ic}$$

$x,y>0$ $\quad z=x+iy$



Ах1 (извод je 0 $h'(t)=0$ $h(1)=\frac{\pi}{2}$)

$\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\frac{\pi}{2}$, $x,y>0$ јер $\underbrace{\operatorname{arctg}t+\operatorname{arctg}\frac{1}{t}}_{h(t)}=\frac{\pi}{2}$, $t>0$

$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\arg z$ јер $x,y>0$

$$f(z)=(x^2+y^2)e^{x+iy}\cdot e^{-2i\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)}e^{ic}$$

$$f(z)=|z|^2\cdot e^z\cdot e^{2i\arg z}\cdot e^{i(c-\pi)}=e^z\cdot\left(|z|e^{i\arg z}\right)^2\cdot e^{i(c-\pi)}=e^z\cdot z^2\cdot e^{i(c-\pi)}$$

② Нека је $R(x,y)=(x^2+y^2)e^x$, $x,y>0$.

Наћи холоморфну ф-ју f т.д. је $f(z)=R(x,y)e^{i\varphi(x,y)}$, тј. т.д. је $|f|=R(x,y)$.

КР услови: $$\frac{\partial R}{\partial x}=R\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$
$$\frac{\partial R}{\partial y}=-R\,\frac{\partial\varphi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial R}{\partial x}=2xe^x+(x^2+y^2)e^x=(x^2+y^2)e^x\frac{\partial\varphi}{\partial y}\Rightarrow\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{2x+x^2+y^2}{x^2+y^2}=1+\frac{2x}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial R}{\partial y}=2ye^x=(x^2+y^2)e^x\cdot(-1)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{-2y}{x^2+y^2}$$

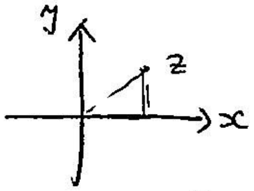
$$\varphi(x,y)=\int\frac{-2y}{x^2+y^2}dx$$
$$=\int\frac{-2y}{y^2\left(1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)}dx=\int\frac{-2}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}d\left(\frac{x}{y}\right)$$
$$=-2\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+C(y)$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-2\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{-x}{y^2}+C'(y)=1+\frac{2x}{x^2+y^2}\Rightarrow C'(y)=1$$
$$\Rightarrow C(y)=y+c$$

$$\boxed{\varphi(x,y)=-2\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+y+c}$$

не може т јединости јер $\underline{x,y>0}$ у задатку! не можемо на овај начин изразити f!

$$R(x,y)e^{i\varphi(x,y)}=(x^2+y^2)e^x\cdot e^{-2i\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+iy+ic}$$

$x,y>0$ $\quad z=x+iy$



$$\operatorname{arctg}\frac{x}{y}+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\frac{\pi}{2},\ x,y>0 \quad \text{јер} \quad \overbrace{\operatorname{arctg}t+\operatorname{arctg}\frac{1}{t}}^{h(t)}=\frac{\pi}{2},\ t>0$$

АН1 (извод је 0, $h'(t)=0$, $h(1)=\frac{\pi}{2}$)

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\arg z \quad \underline{\text{јер } x,y>0}$$

$$f(z)=(x^2+y^2)e^{x+iy}\cdot e^{-2i\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)}e^{ic}$$

$$f(z)=|z|^2\cdot e^z\cdot e^{2i\arg z}\cdot e^{i(c-\pi)}=e^z\cdot\left(|z|e^{i\arg z}\right)^2\cdot e^{i(c-\pi)}=e^z\cdot z^2\cdot e^{i(c-\pi)}$$

деф: f је **цела** ако је аналитичка на $\mathbb{C}$

③ Одредити све целе ф-је $f=u+iv$ тд. је $u-v=e^x(\cos y-\sin y)$.

$u=v+e^x(\cos y-\sin y)$ КР услови: $u_x=v_y$
$u_y=-v_x$

$u_y=v_y+e^x(-\sin y-\cos y)$

$\underline{u_x=v_x+e^x(\cos y-\sin y)}=-u_y+e^x(\cos y-\sin y)=v_y$

$u_y=-u_y+e^x(\cos y-\sin y)+e^x(-\sin y-\cos y)$

$2u_y=-2e^x\sin y$

$u_y=-e^x\sin y \Rightarrow u(x,y)=\int -e^x\sin y\,dy = e^x\cos y+C(x)$

$v(x,y)=u(x,y)-e^x\cos y+e^x\sin y$

$v(x,y)=e^x\sin y+C(x)$

$\left.\begin{array}{l} u_x=e^x\cos y+C'(x) \\ v_y=e^x\cos y \end{array}\right\} \Rightarrow C'(x)=0$

$C(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(z)=e^x\cos y+c+i\cdot(e^x\sin y+c)$

$f(z)=e^x(\cos y+i\sin y)+c(1+i)$

$\boxed{f(z)=e^z+c\cdot(1+i),\ c\in\mathbb{R}}$

за вежбу:

1) Одредити све целе ф-је $f=u+iv$ тд:

а) $v(x,y)=x^2+y$

б) $u(x,y)=e^{-y}(x\cos x-y\sin x)+x^2-y^2$

решење:

а) не постоји

б) $f(z)=ze^{iz}+z^2+ic$

напомена: проверити да ли су хармонијске!

ако нису хармонијске, нема решења! (због теореме 1)

2) Одредити све целе ф-је $f=u+iv$ тд. $u=x^4+y^4-6x^2y^2-4xy$ и $f(0)=i$.

решење: $f(z)=z^4+2iz^2+i$

* Коши-Риманови услови у поларним координатама

$f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ диференцијабилна у $z=x+iy=re^{i\theta}$

$x=r\cos\theta$

$y=r\sin\theta$

$$u_r=u_x\cdot x_r+u_y\cdot y_r=u_x\cdot\cos\theta+u_y\sin\theta$$

$$u_\theta=u_x\cdot x_\theta+u_y\cdot y_\theta=u_x\cdot(-r\sin\theta)+u_y\cdot r\cos\theta$$

$$v_r=v_x\cdot x_r+v_y\cdot y_r=v_x\cdot\cos\theta+v_y\cdot\sin\theta$$

$$v_\theta=v_x\cdot x_\theta+v_y\cdot y_\theta=v_x\cdot(-r\sin\theta)+v_y\cdot r\cos\theta$$

$$\left.\begin{aligned}u_x&=v_y\\ u_y&=-v_x\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad \begin{aligned}u_r&=v_y\cos\theta+(-v_x)\sin\theta\\ v_\theta&=r\cdot(-v_x\sin\theta+v_y\cos\theta)\end{aligned}$$

тј. $\boxed{v_\theta=r\cdot u_r}$

$$u_\theta=-r\,u_x\sin\theta+u_y\,r\cos\theta$$

$$u_\theta=-r\cdot v_y\sin\theta+(-v_x)\,r\cos\theta$$

$$u_\theta=-r\cdot(v_y\sin\theta+v_x\cos\theta)=-r\cdot v_r$$

$$\boxed{u_\theta=-r\cdot v_r}$$

④ Одредити све холоморфне ф-је $f(z)=u(z)+iv(z)$, $z=x+iy=re^{i\theta}$ ако

$u(z)=\dfrac{\sin2\theta-\cos2\theta}{r^2}$ и $f(1+i)=\dfrac{1+i}{2}$

$$u_r=\frac{-2}{r^3}(\sin2\theta-\cos2\theta)$$

$$ru_r=\frac{-2}{r^2}(\sin2\theta-\cos2\theta)=v_\theta\ \Rightarrow\ v=\frac{2}{r^2}\left(\frac{\cos2\theta}{2}+\frac{\sin2\theta}{2}\right)+h(r)\qquad(1)$$

$$u_\theta=\frac{1}{r^2}\cdot(\cos2\theta\cdot2+\sin2\theta\cdot2)=-rv_r\ \Rightarrow\ v_r=\frac{-1}{r^3}(2\cos2\theta+2\sin2\theta)$$

Из 1) $\Rightarrow v_r=(-2)\cdot\dfrac{1}{r^3}(\sin2\theta+\cos2\theta)+h'(r)$

$$\Rightarrow\ h'(r)=0\Rightarrow h(r)=c\in\mathbb{R}$$

$$v = \frac{1}{r^2}(\sin 2\theta + \cos 2\theta) + c$$

$$f = u + iv = \frac{\sin 2\theta - \cos 2\theta}{r^2} + i \cdot \frac{\sin 2\theta + \cos 2\theta}{r^2} + i \cdot c$$

$$= \frac{1}{r^2} \cdot \Big(-(\cos 2\theta - i \cdot \sin 2\theta) + i \cdot (\cos 2\theta - i \sin 2\theta) \Big) + ic$$

$$= \frac{1}{r^2} \cdot (i-1) \cdot e^{-2i\theta} + ic$$

$$= \frac{i-1}{r^2 \cdot e^{2i\theta}} + ic$$

$$z = re^{i\theta} \Rightarrow z^2 = r^2 e^{2i\theta}$$

$$f(z) = \frac{i-1}{z^2} + ic$$

$$f(1+i) = \frac{1+i}{2}$$

$$\frac{i-1}{(1+i)^2} + ic = \frac{1+i}{2}$$

$$\frac{i-1}{1+2i+\cancel{i^2}} + ic = \frac{1+i}{2}$$

$$\frac{i-1}{2i} + ic = \frac{1+i}{2} \qquad / \cdot 2i$$

$$i - 1 - 2c = i + i^2$$

$$\Rightarrow \boxed{c = 0}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(z) = \dfrac{i-1}{z^2} \\ f \text{ холоморфна на } \mathbb{C} \setminus \{0\} \end{array}}$$