(5) У банку која користи ПКС $r(t)$, чија је крива добити $\vec{r}(t)$, уложено је 100€ на период од 3 године. Након прве, друге и треће године укупан новац износи 110€, 142€ и 202€, тим редом. Ако је познато да у тренутку t укупан новац износи at^3+bt^2+ct+d за фиксне $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ и све $0\le t\le 3$, одредити $\vec{r}(\frac{1}{3})$ и $r(\frac{1}{3})$.

$$A(t)=at^3+bt^2+ct+d$$

$$\left.\begin{aligned} A(1)&=110\\ A(2)&=142\\ A(3)&=202\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a+b+c+d&=110\\ 8a+4b+2c+d&=142\\ 27a+9b+3c+d&=202\end{aligned}\right\}$$

решити систем

добија се: $a=1,\ b=8,\ c=1$
$d=100$

$$A(t)=t^3+8t^2+t+100$$

$$\vec{r}(t)=\frac{1}{t}\int_0^t r(s)\,ds \qquad \boxed{A'(t)=A(t)\cdot r(t)} \leftarrow \text{одавде добијамо } r(t)$$

$$A'(t)=3t^2+16t+1$$

$$\Rightarrow r(t)=\frac{3t^2+16t+1}{t^3+8t^2+t+100} \qquad \text{па је } r(\tfrac{1}{3})=\frac{3\cdot\frac{1}{9}+16\cdot\frac{1}{3}+1}{\frac{1}{27}+\frac{8}{9}+\frac{1}{3}+100}=\frac{9+144+27}{\frac{1+24+9+2700}{27}}$$

$$\boxed{r(\tfrac{1}{3})\approx 0{,}066}$$

$$\vec{r}(\tfrac{1}{3})=\frac{1}{\frac{1}{3}}\int_0^{\frac{1}{3}} r(s)\,ds \leftarrow \text{нећемо ово рачунати!}$$

Хоћемо бржи начин!

$$A(t)=A(0)\cdot e^{\int_0^t r(s)ds} \Rightarrow e^{\int_0^t r(s)ds}=\frac{A(t)}{A(0)} \Rightarrow \int_0^t r(s)\,ds=\ln\frac{A(t)}{A(0)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}(t)=\frac{1}{t}\ln\frac{A(t)}{A(0)}} \qquad \vec{r}(\tfrac{1}{3})=3\cdot\ln\frac{A(\frac{1}{3})}{A(0)}=3\ln\frac{\frac{1}{27}+\frac{8}{9}+\frac{1}{3}+100}{100}$$

$$\approx 0{,}037$$

⑥ У временском тренутку 0, новац K уложен је у банку x која користи променљиву каматну стопу $r(t)=0{,}006t^2$. У временском тренутку m, новац $2K$ је уложен у банку y са каматном стопом 10% на годишњем нивоу. У временском тренутку n, $n>m$, укупна вредност сваког улога је $4K$. Одредити m.

Банка x:

$$K\cdot e^{\int_0^n r(t)dt}=4K$$

$$e^{\int_0^n 0{,}006t^2dt}=4$$

$$e^{0{,}006\cdot\frac{n^3}{3}}=4 \quad /\ln$$

$$0{,}002\cdot n^3=\ln 4$$

$$n^3=\frac{\ln 4}{0{,}002}$$

$$n=\sqrt[3]{\frac{\ln 4}{0{,}002}}\approx 8{,}84997$$

Банка y:

$$2K\cdot(1+0{,}1)^{n-m}=4K \quad /:2K$$

$$1{,}1^{n-m}=2 \quad /\ln$$

$$(n-m)\ln 1{,}1=\ln 2$$

$$n-m\approx 7{,}27254$$

$$m=n-7{,}27254$$

$$\boxed{m\approx 1{,}57743}$$

⑦ Први клијент је у банку x уложио новац K са каматном стопом 7,5% на годишњем нивоу. Други клијент је у банку y уложио истог дана (када и први клијент) новац K са променљивом каматном стопом $r(t)=\frac{2t}{t^2+c}$. Познато је да су између 4. и 8. године штедње оба улога остварила исту добит. Одредити c.

$$\underbrace{K\cdot(1+0{,}075)^8-K(1+0{,}075)^4}_{\text{добит између 4. и 8. године за први улог}}=\underbrace{K\cdot e^{\int_0^8 r(t)dt}-K\cdot e^{\int_0^4 r(t)dt}}_{\text{добит за други улог}} \quad /:K$$

$$1{,}075^8-1{,}075^4=e^{\int_0^8 r(t)dt}-e^{\int_0^4 r(t)dt}$$

$$\int_0^x \frac{2t}{t^2+c}\,dt = \int_0^x \frac{d(t^2+c)}{t^2+c} = \ln(t^2+c)\Big|_0^x = \ln(x^2+c) - \ln c = \ln\frac{x^2+c}{c}$$

$$1{,}075^8 - 1{,}075^4 = e^{\ln(64+c)-\ln c} - e^{\ln(16+c)-\ln c} = \frac{64+c}{c} - \frac{16+c}{c} = \frac{48}{c}$$

$$\Rightarrow c \approx \frac{48}{1{,}075^8 - 1{,}075^4} \approx 107{,}41$$

8. а) Ако је променљива каматна стопа $r(t)$ диференцијабилна функција, доказати да важи:

$$r'(t) + r(t)^2 = \frac{A''(t)}{A(t)}$$

где је $A(t)$ укупан новац у тренутку t који одговара каматној стопи $r(t)$.

б) Нека је $A(t) = k\cdot 2^t \cdot 3^{t^2} \cdot 5^{2^t}$ укупан новац у тр. t који одговара каматној стопи $r(t)$, $k>0$. Одредити $r(t)$.

а)

$$\left.\begin{aligned} A(t) &= A(0)\cdot e^{\int_0^t r(s)ds} \\ A'(t) &= r(t)\cdot A(t) \end{aligned}\right\} \text{знано}$$

$$r(t) = \frac{A'(t)}{A(t)} \quad /'$$

$$r'(t) = \frac{A''(t)\cdot A(t) - A'(t)A'(t)}{A(t)^2} = \frac{A''(t)}{A(t)} - \left(\frac{A'(t)}{A(t)}\right)^2 = \frac{A''(t)}{A(t)} - r(t)^2$$

$$\Rightarrow r'(t) + r(t)^2 = \frac{A''(t)}{A(t)}$$

б) Користићемо формулу $r(t) = \dfrac{A'(t)}{A(t)}$.

$$A'(t) = k\cdot\left[2^t\ln 2\cdot 3^{t^2}\cdot 5^{2^t} + 2^t\cdot 3^{t^2}\cdot 2t\ln 3\cdot 5^{2^t} + 2^t 3^{t^2} 5^{2^t}\cdot \ln 5\cdot 2^t\ln 2\right]$$

$$A'(t) = k\cdot 2^t 3^{t^2} 5^{2^t}\cdot\left[\ln 2 + 2t\ln 3 + 2^t\ln 2\cdot\ln 5\right] = A(t)\cdot(\ln 2 + 2t\ln 3 + 2^t\ln 2\ln 5)$$

$$\Rightarrow \boxed{r(t) = \ln 2 + 2t\ln 3 + 2^t\ln 2\cdot\ln 5}$$

формула $P\cdot\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n\cdot t}$

(9) Инвеститор А је уложио 1000€ са каматном стопом 4% и квартарним обрачуном. Након 3 године, он је уложио још 1000€. Инвеститор B је уложио новац K са променљивом каматном стопом $r(t)=\frac{1}{t+6}$. Након 5 година, оба улога имају исту вредност. Одредити K.

$$\underbrace{1000\cdot\left(1+\frac{0{,}04}{4}\right)^{4\cdot 5}+1000\cdot\left(1+\frac{0{,}04}{4}\right)^{4\cdot 2}}_{\text{вредност новца који је уложио А након 5 година}}=\underbrace{K\cdot e^{\int_0^5 r(t)dt}}_{\text{вредност новца инвеститора B након 5 година}}$$

$$1000\cdot\left((1{,}01)^{20}+(1{,}01)^{8}\right)=K\cdot e^{\int_0^5\frac{dt}{t+6}}=K\cdot e^{\ln|t+6|\,|_0^5}=K\cdot e^{\ln 11-\ln 6}=\frac{11}{6}K$$

$$\Rightarrow K=\frac{6}{11}\cdot 1000\left((1{,}01)^{20}+(1{,}01)^{8}\right)\approx 1256{,}21$$

(10) У временском тренутку t_1 у банку која користи $\overbrace{\text{променљиву каматну стопу}}^{\text{ПКС}}$ $r(t)$ уложен је новац K. Одредити укупан новац у тренутку t_2, где је $t_2>t_1$.

$$A(t)=A(0)\cdot e^{\int_0^t r(s)ds}$$

$$A(t_1)=K \qquad K=A(0)\cdot e^{\int_0^{t_1} r(s)ds}$$

$$A(t_2)=A(0)\cdot e^{\int_0^{t_2} r(s)ds}=K\cdot e^{-\int_0^{t_1} r(s)ds}\cdot e^{\int_0^{t_2} r(s)ds}$$

$$A(t_2)=K\cdot e^{\int_{t_1}^{t_2} r(s)ds}=A(t_1)\cdot e^{\int_{t_1}^{t_2} r(s)ds}$$

(11.) У временском тренутку 0 у банку која користи ПКС $r(t)=\frac{t^2}{100}$, уложено је 100€, а у вр. тр. 3 уложен је новац K. Познато је да је остварена добит између треће и шесте године штедње једнака K. Одредити K.

$$\underbrace{100\cdot e^{\int_0^6 r(t)dt}-100\cdot e^{\int_0^3 r(t)dt}}_{\text{добит од улога 100€}}+\underbrace{\underbrace{K\cdot e^{\int_3^6 r(t)dt}}_{\text{новац у тр. 6}}-\underbrace{K}_{\text{новац у тр. 3}}}_{\text{добит од новца K}}=K \leftarrow \text{укупна добит од 3. до 6. године}$$

$$\int_0^6 r(t)\,dt = \int_0^6 \frac{t^2}{100}\,dt = \frac{1}{100}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_0^6 = \frac{6^3}{3\cdot 100} = \frac{\overset{9}{\cancel{36}}\cdot 2}{\underset{25}{\cancel{100}}} = \frac{18}{25} = 0{,}72$$

$$\int_0^3 r(t)\,dt = \frac{1}{100}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{3^3}{3\cdot 100} = \frac{9}{100} = 0{,}09$$

$$\int_3^6 r(t)\,dt = \frac{1}{100}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_3^6 = \frac{6^3-3^3}{3\cdot 100} = \frac{2\cdot 6^2-3^2}{100} = \frac{72-9}{100} = 0{,}63$$

$$100\cdot\left(e^{0{,}72}-e^{0{,}09}\right) + k\cdot e^{0{,}63} = 2k$$

$$k = \frac{100\cdot\left(e^{0{,}72}-e^{0{,}09}\right)}{2-e^{0{,}63}} \approx 784{,}593$$

$$\boxed{K \approx 784{,}593}$$