① Дата је холоморфна функција $f: D^\times(z_0,R) \to \mathbb{C}$. Доказати да тачка z_0 не може бити пол фје e^f.

Нека је $g=e^f$.

g је холоморфна фја (као композиција холоморфних) на $D^\times(z_0,R)$

$\Rightarrow$ g има изоловани сингуларитет у z_0.

1) Ако је z_0 отклоњив сингуларитет за f, онда је f холоморфна на $D(z_0,R)$, па је и g холоморфна на $D(z_0,R)$ тј. z_0 је отклоњив сингуларитет и за g.

2) Ако је z_0 пол фје f реда m, тд да је z_0 пол и фје g реда n. Тада g' има у z_0 пол реда $n+1$, а f' има пол реда $m+1$ у z_0.
Пошто је $g'=e^f\cdot f'=g\cdot f'$ то је ред пола фје g' једнак $n+m+1$

$$\Rightarrow \quad n+1=n+m+1$$

$$m=0 \quad ⚡ \quad \text{дакле тд. није тачна, } z_0 \text{ није пол фје } g$$

3) Ако је z_0 есенцијални сингуларитет фје f, онда на основу задатка ③ са претходног часа, за свако $n\in\mathbb{N}$ је

$f\left(D^\times\left(z_0,\frac{R}{n+1}\right)\right)$ густ у $\mathbb{C}$, па постоје $z_n, w_n \in D^\times\left(z_0,\frac{R}{n+1}\right)$

тд. $f(z_n)\in D(0,\frac{1}{n})$ и $f(w_n)\in D(1,\frac{1}{n})$.

Тада је $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = z_0$, а $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(w_n)=1$

тј. $\lim\limits_{n\to\infty} g(z_n)=e^0=1$, $\lim\limits_{n\to\infty} g(w_n)=e^1=e$, па $\nexists \lim\limits_{z\to z_0} g(z)$, тј. z_0 је есенцијални сингуларитет фје g.

(2) Нека је $m \in \mathbb{N}$ и $f : D^{\times}(z_0, R) \to \mathbb{C}$ холоморфна ф-ја при чему је
$$\operatorname{Re} f(z) \leq -m \cdot \ln|z - z_0|, \text{ за све } z \in D^{\times}(z_0, R).$$
Доказати да је тачка z_0 отклоњив сингуларитет ф-је f.

$|e^f| = e^{\operatorname{Re} f}$

$g(z) = e^{f(z)}$, из услова задатка следи да је

$$e^{\operatorname{Re} f(z)} \leq e^{-m \ln|z-z_0|} = e^{\ln|z-z_0|^{-m}} = |z-z_0|^{-m}$$

$$\Rightarrow \quad |e^f| \cdot |z-z_0|^m \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad |g(z) \cdot (z-z_0)^{m+1}| \leq |z-z_0| \qquad \forall z \in D^{\times}(z_0, R)$$

па је $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) \cdot (z-z_0)^{m+1} = 0$

$\Rightarrow$ ф-ја g у тачки z_0 има или пол или отклоњив сингуларитет

На основу претходног задатка, не може бити пол.

Дакле g у тачки z_0 има отклоњив сингуларитет,

односно $g = e^f$ је холоморфна на $D(z_0, R)$.

- Ако би z_0 био пол реда n ф-је f, онда је пол реда $n+1$ ф-је f'. (*)

$$g' = e^f \cdot f' = g \cdot f', \quad f' = \frac{g'}{g} \quad g' \text{ и } g \text{ холоморфне}, \; g \neq 0$$

$\Rightarrow$ f' је холоморфна на $D(z_0, R)$

$\Rightarrow$ z_0 је отклоњив синг. за f'

$\nexists$ са (*)

$\Rightarrow$ у z_0 није пол ф-је f

- Ако би z_0 био есенцијални синг. ф-је f, онда као у претходном задатку добијамо да је z_0 есенцијални сингуларитет и за g што је нетачно. (g је холом. на $D(z_0, R)$).

Дакле, једино преостаје да је z_0 отклоњив сингуларитет ф-је f.

③ Нека је $f:\mathbb{D}^{\times}\to\mathbb{C}$ холоморфна функција, где је

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \ , z\in\mathbb{D}^{\times} \text{ њен Лоранов развој}$$

при чему је $M>0$ тд. важи

$$r^4\cdot\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2 d\theta \le M \quad ,0<r<1.$$

Доказати да је $a_n=0$ за све $n<-2$.

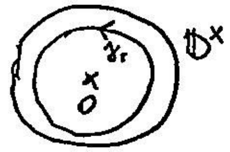
$f:\mathbb{D}^{\times}\to\mathbb{C}$

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = \underbrace{\ldots + a_{-4}z^{-4}+a_{-3}z^{-3}}_{\overset{?}{=}\,0} + a_{-2}z^{-2}+a_{-1}z^{-1}+a_0+a_1 z+a_2 z^2+\ldots$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz \quad (n\in\mathbb{Z})$$

где је γ_r позитивно оријентисана кружница са центром 0 полупречника r, $0<r<1$

$$\gamma_r(\theta)=e^{i\theta}\cdot r \ ,\theta\in[0,2\pi]$$



!

Коши Шварцова неједнакост за интеграле:

$f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ непрекидне

важи: $$\Big(\underbrace{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}_{C}\Big)^2 \le \underbrace{\int_a^b (f(t))^2dt}_{A}\cdot\underbrace{\int_a^b (g(t))^2dt}_{B}$$

доказ: $$C=\int_a^b f(t)g(t)\,dt$$

$x\in\mathbb{R}$ произвољно. $$Ax^2+2Cx+B=\int_a^b\left[(f(t)\cdot x)^2+2\cdot f(t)g(t)\cdot x+(g(t))^2\right]dt$$

$$=\int_a^b (xf(t)+g(t))^2dt \ge 0$$

$\Rightarrow$ квадратна једначина ≥ 0, па је дискриминанта ≤ 0

$$(2C)^2-4AB\le 0$$

$$\Rightarrow \boxed{C^2\le AB}$$

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right| \overset{\text{ОЦН}}{\leq} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}} |dz|$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{r^{n+1}} \int_{\gamma_r} |f(z)||dz| = \frac{1}{2\pi r^{n+1}} \cdot \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| \cdot r \cdot |ie^{i\theta}| d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi r^{n+1}} \cdot r \cdot \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi r^n} \cdot \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta = \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| \cdot 1 \, d\theta \overset{\text{КШ}}{\leq} \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \cdot \int_0^{2\pi} 1^2 d\theta}$$

$$\leq \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{M}{r^4}} = \frac{\sqrt{2\pi M}}{r^2}$$

$$\Rightarrow \; |a_n| \leq \frac{1}{2\pi r^n} \cdot \frac{\sqrt{2\pi M}}{r^2} = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{2\pi} \cdot r^{n+2}} = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{2\pi}} \cdot r^{-(n+2)}$$

за $n+2<0$ је $-(n+2)>0$

па је $\lim\limits_{r \to 0^+} r^{-(n+2)} = 0$

$\Rightarrow$ $a_n = 0$ за $n+2<0$

тј. $\boxed{a_n = 0 \text{ за } n < -2}$

4) Нека је $f: \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}$ холоморфна функција која у тачки 0 има пол првог реда, при чему важи: $f(\mathbb{T}) \subseteq \mathbb{R}$ $(\mathbb{T} = \partial \mathbb{D})$

Доказати да постоје $a \in \mathbb{C}^\times$ и $b \in \mathbb{R}$ тд.

$$f(z) = az + \frac{\bar{a}}{z} + b, \ \forall z \in \mathbb{C}^\times.$$

Уочимо Лоранов развој на $\mathbb{C}^\times = A(0,0,\infty)$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \ z \in \mathbb{C}^\times.$$

Сада, пошто је у 0 пол првог реда, то је $a_n = 0$ за $n < -1$ и $a_{-1} \neq 0$ $\left(f(z) = a_{-1} \cdot \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \right)$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz, \ \gamma = \mathbb{T} \text{ (можемо узети)}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{e^{i\theta(n+1)}} \cdot i \cdot e^{i\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \cdot i \cdot \int_0^{2\pi} \frac{f(e^{i\theta})}{e^{in\theta}} d\theta = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} \cdot f(e^{i\theta}) d\theta$$

$f(e^{i\theta}) \in \mathbb{R}$, па је $f(e^{i\theta}) = \overline{f(e^{i\theta})}$

$\overline{e^{in\theta}} = e^{-in\theta}$

па је $$a_n = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \overline{e^{in\theta} f(e^{i\theta})} d\theta = \overline{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} f(e^{i\theta}) d\theta}$$

$$= \overline{a_{-n}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{a_{-n}} = a_n}$$

за $n < -1$ је $a_n = 0$

за $-n > 1$ је $a_n = 0 = \overline{a_{-n}}$

тј. за $-n > 1$ је $a_{-n} = 0$

за $m > 1$ је $a_m = 0$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z$$

$$a_{-1} = \overline{a_1}$$

$$f(z) = a_1 z + \frac{\overline{a_1}}{z} + a_0$$

$$\boxed{a = a_1, \ b = a_0}$$

- због $a_{-1} \neq 0$ је $a_1 \neq 0$
  тј. $a \neq 0$, па $\underline{a \in \mathbb{C}^\times}$
- $b = a_0$ је тд. $\overline{a_0} = a_0$
  $\Rightarrow \underline{a_0 \in \mathbb{R}}$