Важни лимеси низова

Свако ко жели да положи анализу 1 мора да зна ове лимесе у било које доба дана и у било којем стању!

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$ - лимес константног низа је та константа;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} n^p = +\infty$, за било које $p > 0$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} n^p = 0$, за било које $p < 0$, тј. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$, за било које $p > 0$;

(4)

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{ако } |q| < 1 \\ 1, & \text{ако } q = 1 \\ +\infty, & \text{ако } q > 1 \\ \text{не постоји}, & \text{ако } q \leq -1 \end{cases} \tag{1}$$

(5)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + ... + a_1 n + a_0}{b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + ... + b_1 n + b_0} = \begin{cases} \frac{a_k}{b_m} = \frac{a_k}{b_k} = \frac{a_m}{b_m}, & \text{ако } k = m \\ 0, & \text{ако } k < m \\ \operatorname{sgn}\left(\frac{a_k}{b_m}\right)\infty, & \text{ако } k > m \end{cases} \tag{2}$$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, за било које $a > 0$;

(7) $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

(8) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty$, за $a > 1$, $k \in \mathbb{N}$;

(9) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n n^k = 0$, за $|a| < 1$, $k \in \mathbb{N}$;

(10) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a^l n}{n^k} = 0$, за $a > 0$, $a \neq 1$, $k > 0$, $l \in \mathbb{R}$ - овде највише треба обратити пажњу када је l велико, а k мало;

(11) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, за било које $a \in \mathbb{R}$;

(12) $\lim\limits_{n\to\infty} n!^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$;

(13) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ - овако се дефинише број e (или може ово да се изведе, ако се e дефинише на други начин).

Важне особине лимеса низова

Договор - дефиниција: *Конвергентан* низ је низ који има **коначну** граничну вредност (лимес). Низове који немају граничну вредност, или је то нека од бесконачности зовемо *дивергентним*.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-k} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+k}$, за било који конвергентни низ a_n и $k \in \mathbb{N}$. Другим речима, померање индекса низа за коначан број, не мења његов лимес.

(2) Нека су a_n и b_n конвергентни низови. Тада важи:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Ако је и $b_n \neq 0$, за све $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, тада је и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Дакле, збир, разлика, производ и количник (кад је дефинисан) конвергентних низова је опет конвергентан низ, очекиваног лимеса.

(3) Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, а за низ b_n важи да једна од следећих ствари:
1) Низ b_n је конвергентан;
2) Низ b_n је ограничен (подсећање, конвергентан низ је ограничен, тако да ако важи 1) важи и 2), обрнуто не мора!);
3) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.
Тада је $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = +\infty$.

Аналогно: Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, а за низ b_n важи да једна од следећих ствари:
1) Низ b_n је конвергентан;
2) Низ b_n је ограничен (подсећање, конвергентан низ је ограничен, тако да ако важи 1) важи и 2), обрнуто не мора!);
3) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$.
Тада је $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty$.

БИТНО! Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, не можемо ништа рећи о $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n)$!!!

(4) Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, при чему B може бити и бесконачно. Тада је $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \operatorname{sgn}(B)\infty$.

(5) Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, при чему $B \in \mathbb{R}$ (дакле, коначно!). Тада је $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \operatorname{sgn}(B)\infty$.
БИТНО! Ако је B нека од бесконачности, не можемо ништа да кажемо о $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$!!!

(6) *Нула низови* су низови који конвергирају ка 0. Тада важе својства: 1) Ако су a_n и b_n нула низови, тада је и $a_n \pm b_n$ нула низ;
2) Ако је a_n нула низ, а b_n ограничен низ, тада је $a_n \cdot b_n$ нула низ.
3) Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, $a_n \neq 0$, за све $n \in \mathbb{N}$, тада је $\dfrac{1}{a_n}$ нула низ.
4) Услов $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ је еквивалентан са тим да је $a_n - a$ нула низ.
5) Важи да је a_n нула низ ако и само ако је $|a_n|$ нула низ, тј.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

(7) Ако постоји $n_0 \in \mathbb{N}$, такво да важи $a_n \geq b_n$, за све $n > n_0$, тада је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

БИТНО! Чак и ако важи строга неједнакост $a_n > b_n$ и даље можемо само да закључимо да важи $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, а не $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > \lim\limits_{n\to\infty} b_n$!!!

Аналогно: Ако постоји $n_0 \in \mathbb{N}$, такво да важи $a_n \leq b_n$, за све $n > n_0$, тада је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

БИТНО! Чак и ако важи строга неједнакост $a_n < b_n$ и даље можемо само да закључимо да важи $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, а не $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n$!!!

(8) Елементарне функције, тј. функције које смо учили у средњој школи: полиноми, степене функције, експоненцијалне функције, логаритамске функције, тригонометријске функције и инверзне тригонометријске функције су непрекидне тамо где су дефинисане, тј. можемо пролазити лимесом кроз њих.
Другим речима, ако важи $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, тада је

1) $\lim\limits_{n\to\infty} P(a_n) = P(a)$, где је $P(x)$ било који реалан полином;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^p = a^p$, за $a_n > 0$, за све $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$, $p \in \mathbb{R}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} q^{a_n} = q^a$, за $q > 0$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \log_c(a_n) = \log_c(a)$, за $a, c > 0$, $c \neq 1$, $a_n > 0$, за све $n \in \mathbb{N}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(a_n) = \sin(a)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(a_n) = \cos(a)$;

6) Аналогно тврђење важи (када је дефинисано) за arcsin, arccos, arctg, arcctg.

Теореме које постоје за лимесе низова

(1) Низ a_n се зове *Кошијев низ* ако за свако $\varepsilon > 0$ постоји природан број $n_0 = n_0(\varepsilon)$, тако да је $|x_n - x_m| < \varepsilon$, за све $n, m \geq n_0$.
Ово важи у $\mathbb{R}$, не важи на пример у $\mathbb{Q}$: Низ је конвергентан ако и само ако је Кошијев.

(2) (**Теорема о два полицајца и лопову**) Нека су a_n, b_n, c_n три низа реалних бројева, за које важе:
1) $a_n \leq b_n \leq c_n$, почев од неког n;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$ (овај лимес може бити и коначан и бесконачан).
Тада и за низ b_n важи $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

(3) Ако је a_n монотон и ограничен низ, тада је a_n конвергентан.
Напомена: Ова теорема је честа идеја код рекурентно задатих низова, али, наравно, није гаранција да се сваки такав задатак ради помоћу ње.

(4) (**Штолцова теорема**) Нека за низ b_n важи да је строго растући и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, а a_n произвољан низ. Ако постоји

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L,$$

тада је и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L,$$

при чему L може бити и коначно и бесконачно.
Напомена: Не заборавите да проверите услове за низ b_n ако примењујете Штолцову теорему!!!

(5) (**Кошијева теорема -** може да се види као директна последица Штолцове теореме) Ако је низ a_n конвергентан или има бескоачан лимес, тада је и низ $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + ...a_n}{n}$ конвергентан или има бесконачан лимес и важи

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$