Разни задаци:

① Нека је $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ просто повезана област и $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ хармонијска ф-ја различита од 0 у Ω. Доказати да постоје реалне хармонијске ф-је u и v дефинисане у Ω тако да је $\varphi(z) = u^2(z) - v^2(z)$.

$\left.\begin{array}{l}\Omega \text{ просто повезана} \\ \varphi \text{ хармонијска}\end{array}\right\} \Rightarrow$ постоји аналитичка ф-ја $f : \Omega \to \mathbb{C}$ тд. је $\varphi(z) = \mathrm{Re}\, f(z)$.

Пошто је $\varphi \neq 0$ у Ω, то је и $f \neq 0$ у Ω

$(u+iv)^2 = \underline{u^2 - v^2} + i \cdot 2uv$, ово нас мотивише да очекујемо да је f квадрат ф-је $u + iv$

$f \neq 0$ у Ω, Ω просто повезана $\Rightarrow$ постоји грана вишезначне ф-је корена ф-је f тј. $\exists g : \Omega \to \mathbb{C}$ $g^2(z) = f(z)$, g је аналитичка на Ω

$g(z) = u(z) + iv(z)$, u и v су реалне хармонијске ф-је

$g^2 = f \Rightarrow u^2(z) - v^2(z) + 2iu(z)v(z) = f(z)$

$\Rightarrow \mathrm{Re}\, f(z) = \underline{\underline{u^2(z) - v^2(z) = \varphi(z)}}$

② Израчунати:
$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{10z^9 + 25\,\mathrm{sh}\, z + \frac{1}{2} e^{\frac{z}{2}} e^{e^{\frac{z}{2}}}}{z^{10} + 25\,\mathrm{ch}\, z + e^{e^{z/2}}}\, dz .$$

Приметимо да је израз у бројиоцу извод израза у имениоцу!

$h(z) = z^{10} + 25\,\mathrm{ch}\, z + e^{e^{\frac{z}{2}}}$

$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{h'(z)}{h(z)}\, dz = N_h - P_h$ (N_h број нула, P_h број полова ф-је h унутар криве $|z| = 2$)

$P_h = 0$ јер је h холоморфна на $\mathbb{C}$, па и у $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$

$\Rightarrow I = N_h$

За одређивање броја нула користимо Рушеову теорему:

$h(z) = z^{10} + 25\,\mathrm{ch}\, z + e^{e^{\frac{z}{2}}} = f(z) + g(z)$

$f(z) = z^{10}$, $g(z) = 25\,\mathrm{ch}\, z + e^{e}$

$|f(z)| = 2^{10}$ за $|z|=2$

$|g(z)| = |25\operatorname{ch} z + e^{e^{\frac{z}{2}}}| \le 25|\operatorname{ch} z| + |e^{e^{\frac{z}{2}}}|$

$|z|=2 \quad z=2e^{i\theta}$

$$|\operatorname{ch} z| = \left|\frac{e^z+e^{-z}}{2}\right| \le \frac{1}{2}|e^z+e^{-z}| \le \frac{1}{2}(|e^z|+|e^{-z}|) \le \frac{1}{2}\cdot(e^2+e^2) = e^2$$

$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \le e^2, \; |e^{-z}| = e^{-\operatorname{Re} z} \le e^2$

$|e^{e^{\frac{z}{2}}}| = e^{\operatorname{Re} e^{\frac{z}{2}}} = e^{e^{\frac{x}{2}}\cos\frac{y}{2}} \le e^e$ јер је $\cos\frac{y}{2} \le 1, \frac{x}{2} \le 1$

$(z=x+iy)$

$\Rightarrow \quad |g(z)| \le 25\cdot e^2 + e^e < 25\cdot 9 + 3^3 = 225 + 27 = 252$

$\Rightarrow \quad |g(z)| < |f(z)| \qquad (252 < 1024)$

$\Rightarrow$ f и $f+g=h$ имају једнак број нула у D_2

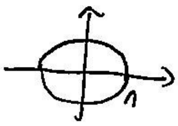
f има 10 нула (0 је нула реда 10)

$\Rightarrow$ h има 10 нула $\boxed{N_h = 10}$

$\Rightarrow \boxed{I = 10}$

③ Израчунати:

$$I = \int_{|z|=1} \frac{z-1}{e^z-3z}\,dz$$



$f(z) = e^z - 3z$ колико нула има f у D?

$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} \le e^1 = e$

$|-3z| = 3$ на ∂D

$\Rightarrow \quad |e^z| < |-3z|$ на ∂D

$\Rightarrow$ $-3z$ и f имају једнак број нула у D тј. 1 нулу

Нека је z_0 нула фје f!

$e^{z_0} = 3z_0, \; |z_0| < 1$

$I = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}\left(\frac{z-1}{e^z-3z}, z_0\right)$

$f'(z) = e^z - 3$

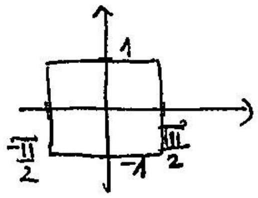
$3z_0 = e^{z_0} \neq 3$ јер је $z_0 \neq 1$

z_0 је пол првог реда фје $\frac{z-1}{e^z-3z}$

јер $\lim\limits_{z\to z_0} (z-z_0)\frac{z-1}{e^z-3z} = \lim\limits_{z\to z_0} \frac{z-1}{\frac{e^z-3z-f(z_0)}{z-z_0}} = \frac{z_0-1}{f'(z_0)}, \; f'(z_0) \neq 0$

$$\Rightarrow \quad I = 2\pi i \cdot \frac{z_0 - 1}{f'(z_0)} = 2\pi i \cdot \frac{z_0-1}{e^{z_0}-3} = 2\pi i \cdot \frac{z_0-1}{3z_0-3} = \frac{2\pi i}{3}$$

(4) Одредити број нула аналитичке ф-је $h(z) = z^2 + 5\sin z$ у правоугаонику $R = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (-1, 1)$



$z=0$ је тривијална нула

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i}\cdot\left(e^{ix-y} - e^{-ix+y}\right)$$

$$= -\frac{i}{2}\cdot\left(e^{-y}\cos x + e^{-y} i \sin x - e^{y}\cdot(\cos x - i\sin x)\right)$$

$$= (-i)\cdot(-\cos x \cdot sh y + \sin x \cdot i \cdot ch y)$$

$$= \sin x\, ch y + i\cdot \cos x\, sh y$$

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x\, ch^2 y + \cos^2 x\, sh^2 y$$

$$= \sin^2 x\, ch^2 y + (1-\sin^2 x) sh^2 y$$

$$= \sin^2 x(\underbrace{ch^2 y - sh^2 y}_{=1}) + sh^2 y = \sin^2 x + sh^2 y$$

$$\Rightarrow |\sin z| \geq |\sin x|$$

$$|\sin z| \geq |sh y|$$

за $x = \frac{\pi}{2}$, $y \in (-1,1)$ је $|\sin z| \geq |\sin\frac{\pi}{2}| = 1$

за $x = -\frac{\pi}{2}$, $y \in (-1,1)$ је $|\sin z| \geq |\sin -\frac{\pi}{2}| = 1$

за $y = \pm 1$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ је $|\sin z| \geq |sh \pm 1| > 1$

$\boxed{|\sin z| \geq 1 \text{ на } \partial R}$

$$sh 1 = \frac{e^1 - e^{-1}}{2} = \frac{e - \frac{1}{e}}{2} = \frac{e^2-1}{2e}$$

$$sh(-1) = \frac{e^{-1} - e^{1}}{2} = -\frac{e^2-1}{2e}$$

$$\frac{e^2-1}{2e} > 1 \qquad e^2 - 1 > 2e$$

$$e^2 - 2e - 1 > 0$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$+ \quad (-) \quad +$; $1-\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$

$\boxed{e > 1+\sqrt{2} \text{ па је } e^2 - 1 > 2e\,!}$

$f(z) = 5\sin z$

$g(z) = z^2$

$$|g(z)| = |z|^2 \leq \left|\frac{\pi}{2} + i\right|^2 = \frac{\pi^2}{4} + 1 \quad \text{на } \partial R$$

$|f(z)| > 5$ на ∂R

$\Rightarrow |g(z)| < |f(z)|$ на ∂R

$\Rightarrow$ f и h имају једнак број нула у R

$f(z)=5\sin z$ колико има нула у R?

због $|\sin z|^2=\sin^2 x+sh^2 y$ је $|\sin z|=0 \iff \sin x = sh\, y = 0$

дакле $x=k\pi$, $y=0$

све нуле фје $\sin z$ су $k\pi, k\in\mathbb{Z}$

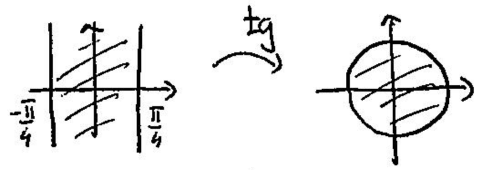
у R се налази само једна, за $k=0$ тј. $z=0$

$\Rightarrow$ h такође има само 1 нулу у R (и то је $z=0$).

⑤ Нека је $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ хармонијска фја и $f(0)=0$.

Доказати да је тада: $|f(z)|\le \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}|z|$. (Шварцова лема за хармонијске)

* фја $tg\, z$:



tg слика траку $|\mathrm{Re}\, z|<\frac{\pi}{4}$ конформно на $\mathbb{D}$

$$tg\, z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{i\cdot(e^{iz}+e^{-iz})} = \frac{e^{2iz}-1}{i(e^{2iz}+1)}$$

$|\sin z|^2 = \sin^2 x + sh^2 y$, $z=x+iy$ (има доказ у претх. зад.)

$$|\cos z|^2 = |\cos(x+iy)|^2 = \left|\frac{e^{-y}e^{ix}+e^{y}\cdot e^{-ix}}{2}\right|^2$$

$iz = i(x+iy) = -y+ix$

$-iz = y-ix$

$$= \left|\frac{e^{-y}\cos x + e^{y}\cos(-x) + ie^{-y}\sin x - ie^{y}\sin x}{2}\right|^2$$

$$= |\cos x\, ch\, y + i\cdot\sin x\cdot(-sh\, y)|^2 = \cos^2 x\, ch^2 y + \sin^2 x\, sh^2 y$$

$$= \cos^2 x\, ch^2 y + (1-\cos^2 x)\, sh^2 y = \cos^2 x(\underbrace{ch^2 y - sh^2 y}_{1}) + sh^2 y = \cos^2 x + sh^2 y$$

$$\Rightarrow |tg\, z|^2 = \frac{\sin^2 x + sh^2 y}{\cos^2 x + sh^2 y}$$

$$|tg\, z|^2 - tg^2 x = \frac{\sin^2 x + sh^2 y}{\cos^2 x + sh^2 y} - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cancel{\sin^2 x\cos^2 x} + sh^2 y\cos^2 x - \cancel{\sin^2 x\cos^2 x} - sh^2 y \sin^2 x}{\cos^2 x(\cos^2 x+sh^2 y)}$$

$$= \frac{sh^2 y\cdot\cos 2x}{\cos^2 x(\cos^2 x + sh^2 y)} > 0 \text{ за } \cos 2x>0$$

за $x\in(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ је $2x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ па је

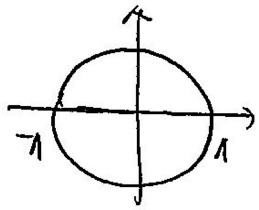
$\cos 2x>0$

Дакле, за $x\in(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ важи $|tg\, z|\ge|tg\, x| = tg|x|$ (♡)

f хармонијска, $f(0)=0$, $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$

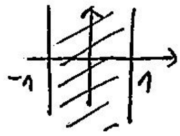
$\mathbb{D}$ просто повезан $\Rightarrow \exists$ холоморфна ф-ја $g\in\mathcal{H}(\mathbb{D})$ тд. је

$$u=\operatorname{Re} f=\operatorname{Re} g \text{ и } g(0)=0$$

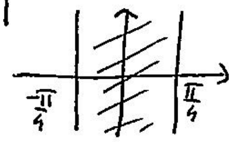


$$|\operatorname{Re} g|=|\operatorname{Re} f|<|f|<1$$

g слика $\mathbb{D}$ у траку



па $G=\frac{\pi}{4}g$ слика $\mathbb{D}$ у траку



па $F=\operatorname{tg}\circ G$ слика $\mathbb{D}$ у $\mathbb{D}$

F је холоморфна и слика $\mathbb{D}$ у $\mathbb{D}$

$$F(0)=\operatorname{tg}(G(0))=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\cdot g(0)\right)=0$$

$\Rightarrow$ Шварцова лема $\quad |F(z)|\le|z|$

$$|\operatorname{tg}(G(z))|\le|z|$$

$\operatorname{Re} G(z)\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ па је испуњено (♡)

$$\Rightarrow \quad |z|\geq|\operatorname{tg}(G(z))|\geq\operatorname{tg}|\operatorname{Re}G(z)|$$

$$|z|\ge \operatorname{tg}\left|\frac{\pi}{4}\cdot u(z)\right|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{4}|u(z)|\le \operatorname{arctg}|z|$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{|u(z)|\le\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}|z|} \quad \forall z\in\mathbb{D}$$

фиксирајмо произвољно $z_0\in\mathbb{D}$

ротирајмо ф-ју f тд. вредност ф-је у z_0 буде реална, па да се f и $\operatorname{Re} f$ поклапају!

$\tilde f(z)=e^{-i\alpha}f(z) \qquad f(z_0)=|f(z_0)|e^{i\arg f(z_0)}, \ \alpha=\arg f(z_0)$

$|\tilde f|=|f| \qquad \tilde f(z_0)=e^{-i\arg f(z_0)}\cdot|f(z_0)|\cdot e^{i\arg f(z_0)}=|f(z_0)|=|\tilde f(z_0)|\in\mathbb{R}$

$\operatorname{Re}\tilde f=\tilde u$ применим претходно на $\tilde f$ и $\tilde u$ добија се

$$|\tilde u(z)|\le\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}|z| \quad \forall z\in\mathbb{D}$$

z_0 било произвољно па неј. важи $\forall z$

$\tilde f(z_0)=\tilde u(z_0)$, па је $|\tilde f(z_0)|\le\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}|z_0|$, па и $\boxed{|f(z)|\le\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}|z|}$