Комплексна интеграција

- $\varphi:[a,b]\to\mathbb{C}$, $a,b\in\mathbb{R}$

  φ непрекидна

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}\,\varphi(t)\,dt + i\cdot\int_a^b \mathrm{Im}\,\varphi(t)\,dt$$

- $\gamma:[a,b]\to\Omega$, $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ γ непрекидна $\rightsquigarrow$ γ представља криву у области $\Omega\subseteq\mathbb{C}$

- Ако је γ непр. диференцијабилна онда кажемо да је γ глатка.

  $\gamma^* = \gamma[a,b]$ траг криве γ

  $\gamma(t) = \mathrm{Re}\,\gamma(t) + i\cdot\mathrm{Im}\,\gamma(t)$

- Ако је γ део по део непр. диф онда кажемо да је γ део по део глатка крива.

- γ затворена крива ако је $\gamma(a)=\gamma(b)$

- дужина криве γ :

$$\ell(\gamma)=\int_a^b|\gamma'(t)|\,dt \quad (\gamma \text{ део по део глатка})$$

- Ако је $f:\Omega\to\mathbb{C}$ непрекидна ф-ја, $\gamma^*\subseteq\Omega$, дефинишемо

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

$$\int_\gamma f(z)\,|dz| = \int_a^b f(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt$$

па можемо писати и $\ell(\gamma)=\int_\gamma |dz|$.

(T1) Основна интегрална неједнакост

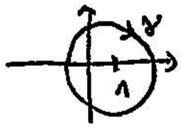
Нека је $f:\Omega\to\mathbb{C}$ непрекидна ф-ја и γ део по део глатка крива у области $\Omega\subseteq\mathbb{C}$. Тада важи:

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le \int_\gamma |f(z)|\,|dz| .$$

* Ако је $\gamma:[a,b]\to\Omega$ део по део глатка и f холоморфна на области Ω онда је $\int\limits_\gamma f'(z)\,dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

(1) Израчунати $I=\int\limits_\gamma (z-1)^n\,dz$ где је $n\in\mathbb{Z}$ и γ негативно оријентисана кружница са центром 1 и полупречником r.

$$\gamma(t) = 1 + re^{it}, \quad t\in[0,2\pi]$$



$$I = -\int_0^{2\pi} (1+re^{it}-1)^n \cdot \gamma'(t)\,dt$$

због негативне оријентације

$$\gamma'(t) = r\cdot i\cdot e^{it}$$

$$I = -\int_0^{2\pi} r^n e^{int}\cdot r\cdot i e^{it}\,dt$$

$$I = -i\int_0^{2\pi} r^{n+1}\cdot e^{i(n+1)t}\,dt = -i\cdot r^{n+1}\cdot \left.\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\right|_0^{2\pi} \quad \text{за } n+1\neq 0$$

$$I = -i\cdot r^{n+1}\cdot \frac{e^{i(n+1)\cdot 2\pi} - e^0}{i(n+1)} = 0 \quad \text{за } n\neq -1$$

$$\text{за } n=-1: \quad I = -i\int_0^{2\pi} r^0\,dt = -i\cdot 2\pi$$

(2) Израчунати

$$I = \int_\gamma (1+i-2\bar{z})\,dz$$

ако је γ крива чија је почетна тачка $z_1=0$, а крајња тачка $z_2=1+i$ при чему је је

а) дуж

б) део параболе $y=x^2$

в) унија дужи z_1z_3 и z_3z_2, $z_3=1$

а)

$$\gamma(t) = z_1 + (z_2-z_1)t, \quad t\in[0,1]$$

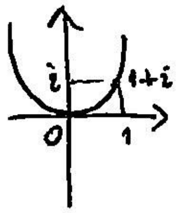
$$\gamma(t) = (1+i)\cdot t$$

$$\gamma'(t) = 1+i$$

$$I = \int_0^1 (1+i-2\,\overline{\gamma(t)})\,\gamma'(t)\,dt = \int_0^1 (1+i-2\cdot(1-i)t)\cdot(1+i)\,dt$$

$$= (1+i)\cdot\left((1+i)\cdot t\Big|_0^1 - 2(1-i)\,\frac{t^2}{2}\Big|_0^1\right) = (1+i)\big((1+i)-(1-i)\big) = 2i(1+i) = 2i-2$$

б) $y=x^2$ парабола



$$\gamma(t)=t+it^2,\ t\in[0,1]$$

$$\gamma'(t)=1+2it$$

$$I=\int_0^1 (1+i-2\overline{\gamma(t)})\gamma'(t)dt$$

$$I=\int_0^1 (1+i-2\cdot(t-it^2))\cdot(1+2it)dt$$

$$I=\int_0^1 (1+i-2t+2it^2)(1+2it)dt$$

$$I=\int_0^1 (\underline{1}+i-\underline{2t}+2it^2+2it+\underline{2i^2t}-4it^2+\underline{4i^2t^3})dt$$

$$I=\int_0^1 (1-4t-4t^3)dt+i\cdot\int_0^1 (1+2t^2-4t^2+2t)dt$$

$$I=\int_0^1 (1-4t-4t^3)dt+i\int_0^1 (1+2t-2t^2)dt$$

$$I=(t-2t^2-t^4)\Big|_0^1+i\cdot\left(t+t^2-\frac{2}{3}t^3\right)\Big|_0^1$$

$$I=(1-2-1)+i\left(1+1-\frac{2}{3}\right)=-2+i\cdot\frac{4}{3}$$

в)

$$I=\int_{\gamma_1}(1+i-2\bar{z})dz+\int_{\gamma_2}(1+i-2\bar{z})dz$$

γ_1 дуж z_1z_3 $\quad \gamma_1(t)=z_1+(z_3-z_1)t,\ t\in[0,1]$ $\quad \gamma_1(t)=t,\ t\in[0,1]$

γ_2 дуж z_3z_2 $\quad \gamma_2(t)=z_3+(z_2-z_3)t,\ t\in[0,1]$ $\quad \gamma_2(t)=1+it,\ t\in[0,1]$

$$I=\int_0^1 (1+i-2t)\,dt+\int_0^1 (1+i-2(1-it))\cdot i\,dt$$

$$I=\int_0^1 (1-2t)dt+i\cdot\int_0^1 dt+\int_0^1 (i-1-2i-2t)dt$$

$$I=\int_0^1 (1-2t)\,dt+i\cdot t\Big|_0^1+\int_0^1 (-1-2t)dt-i\cdot\int_0^1 dt$$

$I = (t-t^2)\Big|_0^1 + i - 1 + (-t-t^2)\Big|_0^1 - i\cdot t\Big|_0^1$

$I = (1-1) + i + (-1-1) - i = -2$

③ а) Израчунати $\int_\gamma (z^2-\bar z)\,dz$ где је $\gamma(t)=e^{it}$, $t\in[0,1]$.

б) Доказати да важи: $\left|\int_\gamma \frac{e^z}{z}\,dz\right| \le \pi e$ ако је $\gamma(t)=e^{it}$, $t\in[0,\pi]$.

а) $$\int_\gamma (z^2-\bar z)\,dz = \int_0^1 (e^{2it}-e^{-it})\cdot i e^{it}\,dt = i\cdot\int_0^1 (e^{3it}-1)\,dt = i\cdot\left(\frac{e^{3it}}{3i}\Big|_0^1 - t\Big|_0^1\right)$$

$$= i\cdot\left(\frac{e^{3i}-1}{3i}-1\right)$$

$$= e^{3i}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{3} - i$$

б) $$\left|\int_\gamma \frac{e^z}{z}\,dz\right| \underset{\substack{\uparrow\\ \text{ОИН}\\ (T1)}}{\le} \int_\gamma \frac{|e^z|}{|z|}\,|dz| \underset{\uparrow}{=} \int_0^\pi \frac{e^{\cos t}}{|e^{it}|}\cdot|ie^{it}|\,dt$$

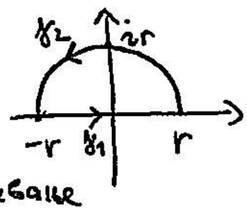
$|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z} = e^{\cos t}$, $z=\cos t + i\sin t$

$$= \int_0^\pi e^{\cos t}\,dt \underset{\substack{\uparrow\\ \cos t\le 1}}{\le} \int_0^\pi e\,dt = e\cdot\pi$$

④ Израчунати: $\int_\gamma z|z|\,dz$, γ позитивно оријентисана граница области $\Omega = D(0,r)\cap \mathbb{H}$.

$\mathbb{H}=\{z\in\mathbb{C}: \mathrm{Im}\, z>0\}$

$D(0,r)=\{z\in\mathbb{C}: |z|<r\}$



$\gamma=\gamma_1+\gamma_2$, + означава надовезивање кривих

$\gamma_1(t)=t$, $t\in[-r,r]$

$\gamma_2(t)=re^{it}$, $t\in[0,\pi]$

0 јер је подинтегрална ф-ја непарна!

$$\int_\gamma z|z|\,dz = \int_{\gamma_1} z|z|\,dz + \int_{\gamma_2} z|z|\,dz = \underbrace{\int_{-r}^{r} t|t|\,dt}_{=0} + \int_0^\pi re^{it}\cdot r\cdot rie^{it}\,dt$$

$$= r^3\cdot i\cdot \frac{e^{2it}}{2i}\Big|_0^\pi = \frac{r^3}{2}\cdot\left(e^{2i\pi}-e^0\right) = 0$$

5 Доказати:

а) $\left|\int_\gamma \frac{e^z}{z-3}\,dz\right| \le 2\pi e^2$, γ поз. оријентисана кружница са центром у тачки 1 и полупречника 1

б) $\left|\int_{|z|=2} \frac{1}{z-1}\,dz\right| \le 4\pi$ (овде се подразумева + оријентација)

в) $\left|\int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}}\,dz\right| \le 2\pi e$ (+ оријент.)

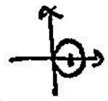
а) $$\left|\int_\gamma \frac{e^z}{z-3}\,dz\right| \underset{\text{ОИН (Т1)}}{\le} \int_\gamma \frac{|e^z|}{|z-3|}\,|dz|$$

$$\underset{(*)}{\le} \int_\gamma \frac{e^2}{1}\,|dz| = e^2 \cdot \underbrace{\int_\gamma |dz|}_{\text{дужина криве тј. обим кружнице}}$$

$$= e^2 \cdot 2\pi$$

(*) $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$

$\gamma:\ |z-1| = 1$



$z = 1 + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

$\operatorname{Re} z = 1 + \cos t \le 2$

$\Rightarrow\ |e^z| \le e^2 \quad \forall z \in \gamma^*$

$|z-3| \ge |z-1| - 2 = -1$

$|z-3| \ge 2 - |z-1| = 1$ (неј. Δ)

б) $$\left|\int_{|z|=2} \frac{1}{z-1}\,dz\right| \underset{\text{ОИН (Т1)}}{\le} \int_{|z|=2} \frac{1}{|z-1|}\,|dz|$$

$|z-1| \ge |z| - 1 = 1$ за $|z| = 2$

$$\le \int_{|z|=2} \frac{1}{1}\,|dz| = \int_{|z|=2} |dz| \underset{\text{обим круга пол. 2}}{=} 2 \cdot 2\pi = 4\pi$$

в) $$\left|\int_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}}\,dz\right| \underset{\text{ОИН (Т1)}}{\le} \int_{|z|=1} |e^{\frac{1}{z}}|\,|dz|$$

$$\underset{(**)}{\le} e \cdot \int_{|z|=1} |dz| = e \cdot 2\pi$$

(**) $|z| = 1$

$z = e^{it}$

$e^{\frac{1}{z}} = e^{e^{-it}}$

$|e^{\frac{1}{z}}| = |e^{e^{-it}}| = e^{\operatorname{Re}(e^{-it})} = e^{\cos t} \le e$