додатак:

Претходни час смо имали мотивацију за увођење ознаке $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$.

Након тога било је речи о фји e^{z}.

$(e^{it})^n=e^{int}$ захтева доказ (да би Моаврова формула била доказана)

$$(\cos t+i\sin t)^n \overset{?}{=} \cos nt+i\sin nt$$

$$\cos(t_1+t_2)=\cos t_1\cos t_2-\sin t_1\sin t_2$$

$$\sin(t_1+t_2)=\sin t_1\cos t_2+\sin t_2\cos t_1$$

$$(\cos t_1+i\sin t_1)\cdot(\cos t_2+i\sin t_2)=\underline{\cos t_1\cos t_2}+i\sin t_1\cos t_2+i\sin t_2\cos t_1\underline{-\sin t_1\sin t_2}$$

$$=\cos(t_1+t_2)+i\sin(t_1+t_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{e^{it_1}\cdot e^{it_2}=e^{i(t_1+t_2)}}$$

Стога се индукцијом добија $(e^{it})^n=e^{int}$.

За $z\in\mathbb{C}$ дефинишемо:
$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

Напомена: $z^n=1$ решавали

$z_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ (n-ти корени из 1)

$k\in\{0,1,2,\dots,n-1\}$

$z_0,z_1,\dots,z_{n-1}$ су у $\mathbb{C}$ темена правилног n-тоугла који је уписан у јединичну кружницу

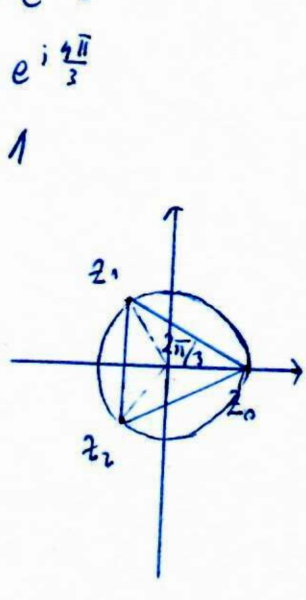
$|z_k|=1\quad\forall k\in\{0,1,2,\dots,n-1\}$

Нпр: $n=3$

$z_1=e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$z_2=e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$z_0=1$



Аналитичке (холоморфне) функције

$d : \mathbb{C}^2 \to [0, +\infty)$

$d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|$

$(\mathbb{C}, d)$ је метрички простор

$(\mathbb{C}, d) \cong (\mathbb{R}^2, d) \Rightarrow$ низови, непрекидност и лимеси су испитани у АН2

Ω отворен скуп у $\mathbb{C}$ } ако се не нагласи другачије
$z_0 \in \Omega$ } одавде па надаље је тако

$f : \Omega \to \mathbb{C}$

$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

$u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(z)$

$v(x,y) = \mathrm{Im}\, f(z)$

$u, v : \Omega \to \mathbb{R}$ реалне фје

(можемо писати и $u(z), v(z)$, а можемо и $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имајући у виду изоморфизам $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}^2$)

(поистовећујемо $x+iy$ и (x,y))

деф1: фја f је диференцијабилна у тачки $z_0 \in \Omega$ ако постоји коначан

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \quad (h \in \mathbb{C} \text{ - пазите})$$

У том случају тај лимес зовемо извод фје f у тачки z_0 и обележавамо са $f'(z_0)$.

деф2: фја f је диференцијабилна на Ω ако је диференцијабилна у свакој тачки скупа Ω.

деф3: фја f је аналитичка (холоморфна) у тачки z_0 ако је диференцијабилна у тачки z_0 и у некој њеној отвореној околини.

деф4: фја f је аналитичка на Ω ако је аналитичка у свакој тачки тог скупа

Тврђење 1: V отворен, $V \subseteq \mathbb{C}$. Тада: f аналитичка у $V \Leftrightarrow f$ диференц. у V

Тврђење 2: f аналитичка у $z \Rightarrow f$ је бесконачно диф. у z $(\exists f^{(n)}(z)\ \forall n \in \mathbb{N}_0)$

① По дефиницији испитати диференцијабилност фја:

а) $f(z)=\bar{z}$ б) $f(z)=z^2$ в) $f(z)=\operatorname{Re} z$.

$z\in\mathbb{C}$ произвољно

а)

$z\in\mathbb{C}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\overline{z+h}-\bar{z}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\bar{h}}{h}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{за } h=ik \text{ је } \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\bar{h}}{h}=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{-ik}{ik}=-1 \\ \text{за } h=k \text{ је } \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\bar{h}}{h}=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{k}{k}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{h\to 0}\frac{\bar{h}}{h}$$

$(k\in\mathbb{R})$

$\Rightarrow$ f није диференцијабилна у z ($z\in\mathbb{C}$ произвољно)

б)

$$\lim_{h\to 0}\frac{(z+h)^2-z^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{z^2}+2zh+h^2-\cancel{z^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2zh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(2z+h)=2z$$

$\Rightarrow$ $f'(z)=2z$ за свако $z\in\mathbb{C}$

тј. f је диференцијабилна у свакој тачки из $\mathbb{C}$.

в)

$$\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{Re}(z+h)-\operatorname{Re} z}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{Re} h}{h}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{за } h=ik \text{ је } \dfrac{\operatorname{Re} h}{h}=\dfrac{0}{h}=0 \\ \text{за } h=k \text{ је } \dfrac{\operatorname{Re} h}{h}=\dfrac{k}{k}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{Re} h}{h}.$$

$\Rightarrow$ f није диференцијабилна у z (ни за једно $z\in\mathbb{C}$)

(Т) Ако је f диференцијабилна у z_0, онда је f и непрекидна у z_0.

непрекидност: $\lim\limits_{h\to 0} f(z_0+h)=f(z_0)$?

f диф. $\Rightarrow$ $\exists\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=f'(z_0)$

$$\lim_{h\to 0}\left(f(z_0+h)-f(z_0)\right)=\lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}}_{\downarrow\, f'(z_0)}\cdot \underset{\downarrow\, 0}{h}=0 \Rightarrow f \text{ јесте непр. у } z_0$$

ТЕОРЕМА* ф-ја f је диференцијабилна у z_0 акко су испуњени диференц. у тачки z_0 $(z_0 = x_0 + iy_0)$ и важи:

$$\left.\begin{aligned} u_x(z_0) &= v_y(z_0) \\ u_y(z_0) &= -v_x(z_0) \end{aligned}\right\}$$ Коши-Риманови услови

Важи: $f'(z_0) = u_x(x_0,y_0) + i\, v_x(x_0,y_0)$

$= v_y(x_0,y_0) - i\, u_y(x_0,y_0)$

скица доказа:

* $$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

за $h = a,\ a\in\mathbb{R}$: $$f'(z) = \lim_{a\to 0} \frac{f(z+a)-f(z)}{a} = \lim_{a\to 0} \frac{u(x+a,y) + i v(x+a,y) - u(x,y) - i v(x,y)}{a}$$

$$= \lim_{a\to 0}\left(\frac{u(x+a,y)-u(x,y)}{a} + i\,\frac{v(x+a,y)-v(x,y)}{a}\right)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = u_x(x,y) + i v_x(x,y)$$

за $h = ia,\ a\in\mathbb{R}$: $$f'(z) = \lim_{a\to 0} \frac{f(z+ia)-f(z)}{ia} = \lim_{a\to 0} \frac{u(x,y+a) + i v(x,y+a) - u(x,y) - i v(x,y)}{ia}$$

$$= \lim_{a\to 0}\left(\frac{u(x,y+a)-u(x,y)}{ia} + \frac{v(x,y+a)-v(x,y)}{a}\right)$$

$$= -i\cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = -i\, u_y(x,y) + v_y(x,y)$$

Означавамо:

$$f_x = u_x + i v_x$$
$$f_y = u_y + i v_y$$
$$f_z = \tfrac{1}{2}(f_x - i f_y)$$
$$f_{\bar z} = \tfrac{1}{2}(f_x + i f_y)$$

КР услови $\Leftrightarrow f_{\bar z} = 0 \Leftrightarrow f_x = -i f_y$

Тада је $f' = f_z$ и $f_z = f_x = f'$.

мотивација:

$$f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$$

$$x = \frac{z+\bar z}{2},\ y = \frac{z-\bar z}{2i}$$

$$f(z) = u\left(\frac{z+\bar z}{2}, \frac{z-\bar z}{2i}\right) + i v\left(\frac{z+\bar z}{2}, \frac{z-\bar z}{2i}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f_z = u_x\cdot\frac{1}{2} + u_y\cdot\frac{1}{2i} + i v_x\cdot\frac{1}{2} + i v_y\frac{1}{2i}$$

желимо да важе уобичајена правила диференцирања

$$= u_x\frac{1}{2} - i u_y\frac{1}{2} + i v_x\frac{1}{2} + v_y\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{u_x + i v_x}{2} - i\,\frac{u_y + v_y\cdot i}{2}$$

$$= \frac{f_x}{2} - \frac{i f_y}{2} = \frac{1}{2}(f_x - i f_y)$$

(аналогно $f_{\bar z}$)

② Користећи Коши-Риманове услове проверити диференцијабилност и аналитичност следећих фја:

а) $f(z)=z^2\bar{z}$ б) $f(z)=e^z$ в) $f(z)=|z|\cdot\bar{z}$ г) $f(z)=|z|\,\mathrm{Re}\,z$ д) $f(z)=|z|^2$

а)

$$f(z)=z^2\bar{z}=(x+iy)^2\cdot(x-iy)=(x+iy)\cdot(x^2-i^2y^2)=x(x^2+y^2)+iy(x^2+y^2)$$

$$u(x,y)=x(x^2+y^2)=x^3+xy^2$$

$$v(x,y)=y(x^2+y^2)=yx^2+y^3$$

$u_x=3x^2+y^2$ $\quad v_x=2xy$

$u_y=2yx$ $\quad v_y=x^2+3y^2$

$u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ даје $3x^2+y^2=x^2+3y^2$, $2yx=-2xy$ $\Rightarrow$ $x^2-y^2=0$, $xy=0$ $\Rightarrow$ $x=y=0$

Дакле, КР услови су испуњени само у тачки $(0,0)$ односно $z=0$.

$\Rightarrow$ то је једина тачка у којој f може бити диференцијабилна

Пошто u_x, u_y, v_x, v_y постоје у околини $(0,0)$ и непрекидни су у тачки $(0,0)$, функције u и v су диференцијабилне у $(0,0)$, па је на основу теореме * f дифер. у тачки $z=0$.

фја f није аналитичка у 0 јер није диф. на околини од 0.
(тј. не постоји околина т. 0 на којој је f диф.)

б) $f(z)=e^z=e^{x+iy}=e^x\cdot e^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$

$$u(x,y)=e^x\cos y$$

$$v(x,y)=e^x\sin y$$

$u_x=e^x\cos y$ $\quad v_x=e^x\sin y$

$u_y=-e^x\sin y$ $\quad v_y=e^x\cos y$

$\Rightarrow u_x=v_y$, $u_y=-v_x$ за све $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

u и v су диференц. (парц. изводи за све $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ непрекидни)

$\Rightarrow$ f је дифер. за све $z\in\mathbb{C}$

Додатно:
f је аналитичка у свакој тачки $z\in\mathbb{C}$ (јер свака тачка има околину на којој је f диф)