$$f'(z)=f_x=u_x+i\,v_x=e^x\cos y+i\cdot e^x\sin y=e^x(\cos y+i\sin y)=e^z$$

в)

$$f(z)=|z|\cdot\bar{z}=\sqrt{x^2+y^2}\cdot(x-iy)=x\sqrt{x^2+y^2}-iy\sqrt{x^2+y^2}$$

$$u(x,y)=x\sqrt{x^2+y^2}$$

$$v(x,y)=-y\sqrt{x^2+y^2}$$

$$u_x=\sqrt{x^2+y^2}+x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x=\sqrt{x^2+y^2}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\quad,(x,y)\neq(0,0)$$

$$u_y=x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\quad,(x,y)\neq(0,0)$$

$$v_x=-y\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x=\frac{-xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\quad,(x,y)\neq(0,0)$$

$$v_y=-\sqrt{x^2+y^2}-y\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y=-\sqrt{x^2+y^2}-\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\quad,(x,y)\neq(0,0)$$

$$u_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{u(0+h,0)-u(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h|h|-0}{h}=\lim_{h\to 0}|h|=0$$

$$u_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{u(0,0+h)-u(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

$$v_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{v(0+h,0)-v(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

$$v_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{v(0,0+h)-v(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h|h|-0}{h}=\lim_{h\to 0}(-|h|)=0$$

У $(0,0)$ су испуњени Коши Риманови услови.

За $(x,y)\neq(0,0)$:

$$u_x=v_y$$
$$u_y=-v_x$$

$$\sqrt{x^2+y^2}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=-\sqrt{x^2+y^2}-\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$3\sqrt{x^2+y^2}=0$$

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

систем нема решења!

Дакле, f није диф. у $(x,y)\neq(0,0)$, па ни аналитичка.

Преостаје још да се испита тачка $(0,0)$. (диференцијабилности, аналитичност само није испуњена јер нема околину где је диференцијабилна)

Да би f била диф. у 0 треба нам још да важи да су u и v диференцијабилне у $(0,0)$.

То можемо урадити на два начина:

1) директно по деф

2) докажемо да парцијални изводи постоје у околини $(0,0)$ и непрекидни су у $(0,0)$.

1)
$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left|u(h_1,h_2)-u(0,0)-[0\ 0]\cdot\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}\right|}{|(h_1,h_2)|} \overset{?}{=} 0 \qquad d_u(0,0)=[0\ 0]$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\left|h_1\sqrt{h_1^2+h_2^2}-0-0\cdot h_1-0\cdot h_2\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} |h_1| = 0$$

Дакле, u јесте диференцијабилна у $(0,0)$. Слично се доказује да је и v диференцијабилна у $(0,0)$, па је f диференцијабилна у $(0,0)$.

2) Јасно је да парц. изводи постоје у околини $(0,0)$, треба само још доказати непрекидност.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u_x(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\sqrt{x^2+y^2}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0 = u_x(0,0) \quad \left(0\le\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} u_y(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = u_y(0,0) \quad \left(0\le\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{x^2+y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} v_x(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = v_x(0,0)$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} v_y(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(-\sqrt{x^2+y^2}-\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0 = v_y(0,0)$$

г) $f(z)=|z|\operatorname{Re} z = x\cdot\sqrt{x^2+y^2}$

$u(x,y)=x\sqrt{x^2+y^2}$

$v(x,y)=0$

$u_x=\sqrt{x^2+y^2}+x\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x=\sqrt{x^2+y^2}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ за $(x,y)\neq(0,0)$

$u_y=x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ за $(x,y)\neq(0,0)$

$v_x=0$

$v_y=0$

$\left.\begin{array}{l} u_x(0,0)=0 \\ u_y(0,0)=0 \end{array}\right\}$ из претходног зад. (в)

Нађимо у којим тачкама важе КР услови.

$u_x=v_y$ за $(x,y)\neq(0,0)$

$u_y=-v_x$

$\sqrt{x^2+y^2}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

$\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

нема решења!

($2x^2+y^2=0 \Rightarrow x=y=0$, а није деф у $(0,0)$)

$u_x(0,0)=0$ $u_y(0,0)=0$

$v_x(0,0)=0$ $v_y(0,0)=0$

КР услови важе само у тачки $(0,0)$

Дакле f није диференцијабилна на $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Није аналитичка ни у једној тачки из $\mathbb{C}$.

Остаје још да се провери диф. у $(0,0)$

Пошто постоје парцијални изводи у околини $(0,0)$,

и непрекидни су у $(0,0)$ (из дела в)), важе КР услови у $(0,0)$

$\Rightarrow f$ диф. у $(0,0)$.

e) за домаћи (још: $f(z)=\bar{z}$, $f(z)=\sin z$, $f(z)=\cos z$)

③ Ако је $f: \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ тд. $f'(z)=0$ $\forall z\in\mathbb{C}$, доказати да је f константна.

$$f'(z)=u_x(z)+i v_x(z) = v_y(z) - i u_y(z) = 0$$

$$\Rightarrow u_x(z)=v_x(z)=v_y(z)=u_y(z)=0 \quad \forall z\in\mathbb{C}$$

$$\underset{\text{АН2}}{\Rightarrow} u=\text{const},\ v=\text{const}. \Rightarrow f=\text{const}.$$

④ Користећи К-Р услове испитати диференцијабилност ф-је:

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{(\operatorname{Re}z)^3-(\operatorname{Im}z)^3+i((\operatorname{Re}z)^3+i\cdot(\operatorname{Im}z))^3}{|z|^2}, & z\neq 0\\ 0, & z=0\end{cases}$$

у тачки $(0,0)$.

$$u(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases} \qquad v(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Пошто нас занима само тачка $(0,0)$ нађимо парцијалне изводе у тој тачки.

$$u_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{u(h,0)-u(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$
$$v_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{v(h,0)-v(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$
$$u_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{u(0,h)-u(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h}=-1$$
$$v_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{v(0,h)-v(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$$

$\Rightarrow$ $u_x(0,0)=v_y(0,0)$, $u_y(0,0)=-v_x(0,0)$

Испуњени су КР услови.

Да ли су u и v дифер. у $(0,0)$? Проверимо по деф.

За ф-ју u:
$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\left|u(h_1,h_2)-u(0,0)-[u_x\ u_y]\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$=\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\left|\frac{h_1^3-h_2^3}{h_1^2+h_2^2}-0-[1\ -1]\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\left|\frac{h_1^3-h_2^3}{h_1^2+h_2^2}-h_1+h_2\right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$=\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\left|\cancel{h_1^3}-\cancel{h_2^3}-\cancel{h_1^3}-h_1h_2^2+h_2h_1^2+\cancel{h_2^3}\right|}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{|h_1h_2|\,|h_1-h_2|}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(1) за $h_1=h_2$ добијемо 0 (2) за $h_1=-h_2$ $\dfrac{h_1^2\cdot 2|h_1|}{(2h_1^2)^{3/2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\neq 0 \Rightarrow u$ није диф. у $(0,0)$

5) Одредити фју f аналитичку у $\mathbb{C}$ тд. важи:

$$\operatorname{Re} f(z) = x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3, \quad f(0)=0.$$

$u(x,y) = x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3$

$u_x = 3x^2+12xy-3y^2$

$u_y = 6x^2-6xy-6y^2$

$v(x,y) = ?$

$\left.\begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array}\right\}$ КР услови

$v_y = 3x^2+12xy-3y^2$

$v_x = -6x^2+6xy+6y^2$

$v(x,y) = \int (3x^2+12xy-3y^2)\,dy + C(x)$

$v(x,y) = 3x^2y + 12x\dfrac{y^2}{2} - 3\cdot\dfrac{y^3}{3} + C(x)$

$v(x,y) = 3x^2y+6xy^2-y^3+C(x)$

$v_x = 6xy+6y^2+C'(x) = -6x^2+6xy+6y^2$

$\Rightarrow \quad C'(x) = -6x^2$

$C(x) = -6\dfrac{x^3}{3} + D$

$C(x) = -2x^3+D$

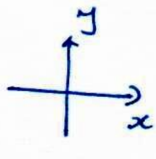
$v(x,y) = 3x^2y+6xy^2-y^3-2x^3+D$

$v(0,0) = 0$

$\Rightarrow \boxed{D=0}$

Коначно, $\boxed{v(x,y) = 3x^2y+6xy^2-y^3-2x^3}$

ТЕОРЕМА ЈЕДИНОСТИ:
Нека је $D \subseteq \mathbb{C}$ област и нека су $f, g: D \to \mathbb{C}$ аналитичке на D. Ако је $f(z)=g(z)$ $\forall z\in A$, при чему $A \subseteq D$ је такав да има тачку нагомилавања у D, онда је $f(z)=g(z)$, $\forall z \in D$.



$f(x,0) = x^3 + i\cdot(-2x^3)$

$f(x,0) = (1-2i)x^3$

$\boxed{f(z) = (1-2i)z^3}$

Из теореме јединости следи да је $f(z)=(1-2i)z^3$.
(f и $(1-2i)z^3$ се поклапају на правој x, која има тачку нагомилавања у $\mathbb{C}$)