(1) У зависности од параметра $\alpha\in\mathbb{R}$, одредити скуп свих $x\in\mathbb{R}$ за које конвергира ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2\ln n}\cdot x^n.$$

$$a_n = n^{\alpha n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2\ln n}, \quad \sqrt[n]{|a_n|} = n^{\alpha}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}_{\to e}{}^{\cdot\ln n} \sim n^{\alpha+1},\ n\to\infty$$

$$e^{\ln n} = n$$

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}} = ?$$

$$R = \begin{cases} 0 & ,\ \alpha+1>0 \\ 1 & ,\ \alpha+1=0 \\ \infty & ,\ \alpha+1<0 \end{cases}$$

- за $\alpha>-1$ је $R=0$, па ред див. за све $x\in\mathbb{R}$, осим за $x=0$ (када је једнак 0)
- за $\alpha<-1$ је $R=\infty$, па ред конв. за све $x\in\mathbb{R}$.
- за $\alpha=-1$ је $R=1$, па ред конв. на $(-1,1)$.

Остаје да се испита у тачкама $x=1$ и $x=-1$.

за $x=1$:
$$a_n = n^{-n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2\ln n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2\ln n}}{n^n} > 0$$

Да ли конв. ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$?

$$a_n = \frac{e^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)n^2\ln n}}{n^n} = \frac{e^{n^2\ln n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}}{e^{\ln n\cdot n}}$$

$$= e^{n^2\ln n\cdot\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - n\ln n}$$

$$= e^{n\ln n\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right)}$$

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1 = n\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)-1,\ n\to+\infty$$

$$= \frac{-1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),\ n\to+\infty$$

$$a_n = e^{n\ln n\cdot\left(-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}, n\to\infty$$

$$= e^{\ln n\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}, n\to\infty$$

$$\sim e^{\ln n\cdot -\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{n}}, n\to\infty$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ дивергира $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ дивергира

• за $x=-1$:

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot a_n$ да ли конвергира?

$$a_n = e^{n\ln n\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right)}$$

да ли је a_n монотон? знамо да је $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(за $n\geq n_0$ довољно би било!) (јер $a_n\sim\frac{1}{\sqrt{n}}, n\to\infty$)

$$f(x) = e^{x\ln x\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right)}$$

$$g(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1$$

$$g'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}$$

$$g''(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x^2+x}+\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{-x-1+x}{x(x+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{x(x+1)^2} < 0 \text{ за } x>1$$

$\Rightarrow g' \downarrow$ на $(1,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x) = 0$

$g'(1) = \ln 2 - \frac{1}{2} > 0$ (јер је $\ln 2 > \frac{1}{2}$, тј. $2 > \sqrt{e}$) ← само проверавћ.)

$\Rightarrow g'(x) > 0$ за све $x \in (1,+\infty)$

$\Rightarrow g \uparrow$ на $(1,+\infty)$

$g(1) = \ln 2 - 1 < 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x\ln(1+\frac{1}{x}) - 1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})\right) - 1\right)$

$= 0$

$\Rightarrow g(x) < 0$ за све $x \in (1,+\infty)$

$f(x) = e^{x\ln x\,(x\ln(1+\frac{1}{x}) - 1)}$, $g(x) = x\ln(1+\frac{1}{x}) - 1$, $g'(x) = \ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}$

$f'(x) = f(x)\cdot(x\ln x\cdot g(x))'$

$g(x) < 0$ за $x \in (1,+\infty)$, $g'(x) > 0$ на $(1,+\infty)$

$f'(x) = f(x)\cdot\left(\ln x\cdot g(x) + x\cdot(\ln x\, g(x))'\right)$

$= f(x)\cdot\left(\ln x\, g(x) + x\cdot\left(\frac{1}{x} g(x) + \ln x\cdot g'(x)\right)\right)$

$= f(x)\left(\ln x\, g(x) + g(x) + x\ln x\, g'(x)\right)$

очекимо: $f'(x) < 0$ за $x \geq x_0$!

$\Leftrightarrow (\ln x + 1)\, g(x) + x\ln x\, g'(x) < 0$ за $x \geq x_0$

$\Leftrightarrow -x\ln x\cdot\left(\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}\right) + (\ln x + 1)\left(1 - x\ln(1+\frac{1}{x})\right) > 0$, $x \geq x_0$

$\Leftrightarrow \ln x + 1 - \underline{\ln x\cdot\ln(1+\frac{1}{x})\cdot x} - x\ln(1+\frac{1}{x}) - \underline{x\ln x\,\ln(1+\frac{1}{x})} + \frac{x\ln x}{x+1} > 0$ за $x \geq x_0$

$\Leftrightarrow \ln x + 1 - 2\ln x\cdot\ln(1+\frac{1}{x})\cdot x + \frac{x}{x+1}\ln x - x\ln(1+\frac{1}{x}) > 0$, $x \geq x_0$

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right), \ x \to +\infty$$

$$L = \ln x + 1 - 2\ln x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot x + \frac{x}{x+1}\ln x - x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{?}{>} 0 \quad \text{за } x \geq x_0$$

$$L = \ln x + 1 - 2\ln x \cdot\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\cdot x + \ln x - \frac{\ln x}{x}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$$
$$- x\cdot\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right), \ x \to +\infty$$

$$L = 2\ln x + 1 - 2\ln x\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) - \frac{\ln x}{x}\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$
$$- 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \ x \to +\infty$$

$$L = \cancel{2\ln x} \cancel{+1} - \cancel{2\ln x} + \cancel{\frac{\ln x}{x}} - \frac{2\ln x}{3x^2} + o\left(\frac{\ln x}{x^2}\right) - \cancel{\frac{\ln x}{x}} + \frac{\ln x}{x^2} - \frac{\ln x}{x^3} + o\left(\frac{\ln x}{x^3}\right)$$
$$\cancel{-1} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \ x \to +\infty$$

$$L = \frac{1}{3}\frac{\ln x}{x^2} + o\left(\frac{\ln x}{x^2}\right) + \frac{1}{2x} - \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \ x \to +\infty$$

Сада је јасно да је за $x \geq x_0$ испуњено $L > 0$!

$$L = \frac{\ln x}{x^2}\left(\underbrace{\frac{1}{3} + o(1) + \frac{x}{2\ln x} - \frac{1}{3\ln x} + o\left(\frac{1}{\ln x}\right)}_{>0 \text{ за велике } x!}\right), \ x \to +\infty$$

II начин:

$$\ln x + 1 + \frac{x}{x+1}\ln x > x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)(1 + 2\ln x) \quad ?$$

$$2\ln x + 1 - \frac{\ln x}{x+1} > x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)(2\ln x + 1)$$

$$\boxed{(2\ln x + 1)\left(1 - x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) > \frac{\ln x}{x+1}} \quad ?$$

из развоја $1 - x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1 - x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) = \frac{1}{2x} - \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \ x \to \infty$

докажите! (следи и из развоја кад се уради још 1 члан!

се може наслутити да важи $1 - x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \geq \frac{1}{2x} - \frac{1}{3x^2}$ за $x \geq x_0$ (*)

$$\Rightarrow (2\ln x + 1)\left(1 - x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) \geq (2\ln x + 1)\cdot\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{3x^2}\right) \underset{?\,(**)}{\geq} \frac{\ln x}{x+1}, \quad \frac{1}{2x} - \frac{1}{3x^2} = \frac{3x-2}{6x^2}$$

$$(**) \iff (2\ln x + 1)(x+1) \geq \ln x\cdot\frac{6x^2}{3x-2}$$
$$(2\ln x + 1)(x+1)(3x-2) \geq 6\ln x\, x^2$$
$$(2\ln x + 1)(3x^2 + x - 2) \geq 6\ln x\cdot x^2$$

$$\cancel{6\ln x\, x^2} + 3x^2 + 2\ln x\, x + x - 4\ln x - 2 \geq \cancel{6\ln x\, x^2}$$
$$3x^2 + 2\ln x(x-2) + x - 2 \geq 0$$

за $x \geq 2$ важи!

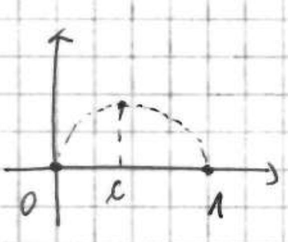
② Нека је $f\in C^2[0,1]$ конкавна ф-ја при чему је

$f(0)=f(1)=0$ и $f(x)\neq 0$ за $x\in(0,1)$.

а) Доказати да је $\max\limits_{x\in[0,1]} f(x) \le \dfrac{f'(0)\cdot f'(1)}{f'(1)-f'(0)}$.

б) Доказати да је $\int_0^1 |f''(x)|\,dx \ge f'(0)-f'(1)$.

в) Доказати да је $\int_0^1 \left|\dfrac{f''(x)}{f(x)}\right| dx \ge 4$.



Ролова т. даје: $(\exists c\in(0,1))\ f'(c)=0$

f конкавна $\Rightarrow$ $f''(x)<0$ за све $x\in(0,1)$

па f' опада на $(0,1)$

$\Rightarrow$ $f'(x)>0$ за $x\in(0,c)$ $\to$ $f\uparrow$ на $(0,c)$

$f'(x)<0$ за $x\in(c,1)$ $\to$ $f\downarrow$ на $(c,1)$

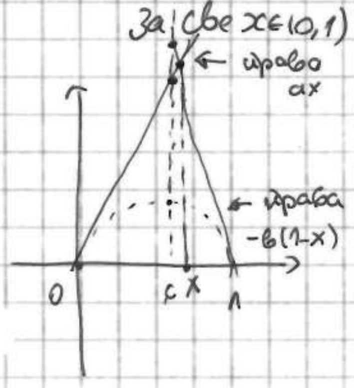
Нека је $a=f'(0)$ и $b=f'(1)$. Знамо: $a>0$, $b<0$

$\max\limits_{x\in[0,1]} f(x) = f(c)$

Треба доказати: $f(c)\le \dfrac{a\cdot b}{b-a} = \dfrac{-ab}{a-b} = \dfrac{1}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$

f' опада на $(0,1)$ па је $b\le f'(x)\le a$

за све $x\in(0,1)$



$f(x)=\int_0^x f'(t)\,dt$

$f(c)=\int_0^c f'(t)\,dt \overset{f'\le a}{\le} a\cdot c$

$f(c)=\int_1^c f'(t)\,dt = \int_c^1 (-f'(t))\,dt \overset{-f'\le -b}{\le} -b\cdot(1-c)$

овде процене зависе од c!

Вредност f-је у c је мања и од вредности у тачки пресека ових правих!

$ax=-b(1-x)$

$ax+b(1-x)=0$

$(a-b)x=-b \qquad x=\dfrac{-b}{a-b}$

$y=\dfrac{-ab}{a-b}$ и $f(c)\le \dfrac{-ab}{a-b}$

она је између ових вредности! ac и $-b(1-c)$

δ) $\int_0^1 |f''(x)|\,dx \overset{?}{\geq} f'(0) - f'(1)$

$$\int_0^1 |f''(x)|\,dx \geq \left| \int_0^1 f''(x)\,dx \right| = \left| f'(1) - f'(0) \right| = f'(0) - f'(1) = a - b$$

б) $\int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx \underset{?}{\geq} 4$

$$\int_0^1 \left| \frac{f''(x)}{f(x)} \right| dx \geq \frac{1}{\max\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|} \cdot \int_0^1 |f''(x)|\,dx$$

$$\geq \frac{f'(1) - f'(0)}{f'(0) \cdot f'(1)} \cdot (f'(0) - f'(1)) = \frac{b-a}{ab} \cdot (a-b)$$

$$= \frac{(a-b)^2}{-ab} \underset{?}{\geq} 4 \quad / \cdot (-ab) \quad , \underline{\underline{-ab > 0}}$$

$$(a-b)^2 \geq -4ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 4ab \geq 0$$

$$(a+b)^2 \geq 0 \quad W$$